

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ «ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ»

А.Г. Дивин<sup>1</sup>, С.В. Пономарев<sup>1</sup>, С.В. Мищенко<sup>1</sup>,  
А.И. Урусов<sup>2</sup>, М.А. Петрашева<sup>1</sup>, Д.А. Дивина<sup>1</sup>

*Кафедры: «Управление качеством и сертификация», (1);  
«Высшая математика», (2); ГОУ ВПО «ТГТУ»; dv63@rambler.ru*

**Ключевые слова и фразы:** диссипация; измерительное устройство; неньютоновские жидкости; сдвиговое течение; температуропроводность; теплоемкость; теплопроводность.

**Аннотация:** Предложена физическая модель измерительного устройства, позволяющего реализовать метод определения теплофизических характеристик неньютоновских жидких материалов в условиях сдвигового течения путем разбиения исходной задачи теплопроводности на две, соответствующие стационарному и нестационарному этапам эксперимента.

### Обозначения

$C_1, \dots, C_8$ – постоянные коэффициенты;	$V_n$ – объем нагревателя, м <sup>3</sup> ;
$c_{x\rho x}$ – объемная теплоемкость исследуемой жидкости, Дж/(м <sup>3</sup> ·К);	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – коэффициенты теплопроводности подложки, нагревателя и защитного слоя внутреннего цилиндра соответственно, Вт/(м·К);
$J_0, Y_0$ – цилиндрические функции первого и второго рода Бесселя и Неймана соответственно.	$\lambda_{rr} = \lambda_4$ – второй диагональный компонент тензора теплопроводности $\Lambda$ исследуемого расплава полимерного материала, численно равный теплопроводности слоя исследуемой жидкости в направлении, перпендикулярном скорости сдвига, Вт/(м·К);
$l$ – длина цилиндрического слоя нагревателя;	$\sigma_{r\varphi}$ – касательное напряжение в слое исследуемой жидкости, Па;
$m$ – коэффициент консистенции, Па·с <sup><i>n</i></sup> ;	$\eta_a(\gamma)$ – кажущаяся вязкость неньютоновской жидкости, Па·с;
$n$ – индекс течения неньютоновской жидкости;	$\tau$ – время, с;
$R_1, R_2, R_3, R_4$ – радиусы слоев внутреннего цилиндра, м;	$\omega_\varphi(r)$ – скорость жидкости в зазоре между цилиндрами измерительного устройства, м/с;
$R_5$ – внутренний радиус наружного цилиндра, м;	$\Phi(r)$ – функция диссипативного источника тепла в слое исследуемой неньютоновской жидкости, Вт/м <sup>3</sup> .
$T_1, T_2, T_3, T_4$ – температуры в слоях подложки, нагревателя, защитного слоя и анализируемого материала соответственно, находящегося в цилиндрическом зазоре измерительного устройства, К;	
$T^*$ – среднеинтегральная избыточная температура в слое нагревателя неподвижного внутреннего цилиндра, К;	
$Q_n$ – мощность нагревателя внутреннего цилиндра, Вт;	

## Введение

Абсолютное большинство теплофизических приборов и установок позволяют измерять теплопроводность, температуропроводность и теплоемкость жидкостей в неподвижном состоянии. Вместе с тем, существует необходимость измерения теплофизических характеристик жидкостей в условиях сдвигового течения. Это обусловлено тем, что в неньютоновских жидкостях при течении может возникать анизотропия теплофизических характеристик. Данное физическое явление имеет место, когда в растворах и расплавах высокомолекулярных полимерных соединений образуются молекулярные структуры, ориентированные вдоль направления сдвига [1, 2]. Степень ориентации таких структур прямо пропорциональна скорости сдвига [3]. При этом наблюдается изменение физико-механических свойств материалов, в том числе возникает анизотропия теплофизических и реологических характеристик. Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности при этом превращаются в тензоры [1]. Компоненты тензоров зависят от степени ориентации макромолекул полимера, а значит и от скорости сдвига. Исследование этих зависимостей носит фундаментальный характер, позволяет изучить закономерности теплопереноса в жидких ориентированных средах, а также имеет большое практическое значение. Знание зависимости теплопроводности и температуропроводности технологических жидкостей (например, растворов и расплавов полимеров) от скорости сдвига позволит оптимизировать процессы их переработки при экструзии, литье под давлением и др., что позволит снизить выход брака и уменьшить энергозатраты на единицу продукции.

### Физическая и математическая модели измерительного устройства

Для определения зависимости теплофизических характеристик неньютоновских жидких материалов предлагается использовать измерительное устройство, физическая модель которого представлена на рис. 1 [2].

Измерительное устройство представляет собой два коаксиальных цилиндра: внутренний (составной) и наружный, в зазоре между которыми находится исследуемая жидкость 4. В сечении внутреннего цилиндра на подложке 1 находится слой 2 электронагревателя и термопреобразователя сопротивления, отделенный от исследуемой жидкости защитным слоем 3. Наружный цилиндр приводится во вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

В полости внутреннего цилиндра находится активно перемешиваемая жидкость 5 с постоянной температурой, прокачиваемая из термостата.

Для измерительного устройства, физическая модель которого представлена на рис. 1, краевую задачу, описывающую распределение температуры в слоях измерительного устройства, предлагается записать в следующем виде:

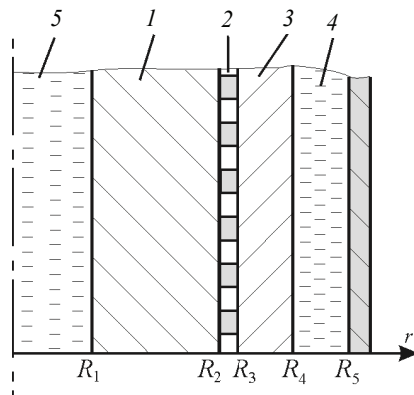


Рис. 1. Физическая модель измерительного устройства

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\lambda_1}{c_1 \rho_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial r} \right), & R_1 < r < R_2, \tau > 0; \\
\frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial r} \right) + \frac{Q_H}{V_H c_2 \rho_2}, & R_2 < r < R_3, \tau > 0; \\
\frac{\partial T_3(r, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\lambda_3}{c_3 \rho_3} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_3(r, \tau)}{\partial r} \right), & R_3 < r < R_4, \tau > 0; \\
\frac{\partial T_4(r, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\lambda_{rr}}{c_x \rho_x} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_4(r, \tau)}{\partial r} \right) + \frac{\Phi(r)}{c_x \lambda_{rr}}, & R_4 < r < R_5, \tau > 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями:

$$T_1(r, 0) = T_2(r, 0) = T_3(r, 0) = T_4(r, 0) = 0,$$

с граничными условиями:

$$T_1(R_1) = T_0 = 0; \tag{2}$$

$$T_1(R_2, \tau) = T_2(R_2, \tau), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1(R_2, \tau)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(R_2, \tau)}{\partial r}; \tag{3}$$

$$T_2(R_3, \tau) = T_3(R_3, \tau), \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2(R_3, \tau)}{\partial r} = \lambda_3 \frac{\partial T_3(R_3, \tau)}{\partial r}; \tag{4}$$

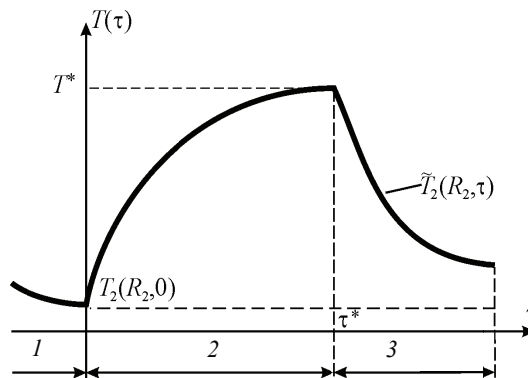
$$T_3(R_4, \tau) = T_4(R_4, \tau), \quad \lambda_3 \frac{\partial T_3(R_4, \tau)}{\partial r} = \lambda_{rr} \frac{\partial T_4(R_4, \tau)}{\partial r}; \tag{5}$$

$$T_4(R_5, \tau) = 0, \tag{6}$$

и дополнительным условием

$$T^* = \frac{2}{R_3^2 - R_2^2} \int_{R_2}^{R_3} T_2(r, \tau) r dr.$$

Решение подобной задачи довольно затруднительно, и потому проведение активной стадии теплофизического эксперимента предлагается провести в два этапа (рис. 2).



**Рис. 2.** Зависимость среднеинтегральной температуры слоя нагревателя измерительного устройства от времени и этапа эксперимента: 1 – подготовительный этап; 2 – этап стационарной стадии метода измерений; 3 – этап нестационарной стадии метода измерений

Перед активной стадией эксперимента необходимо провести подготовительный этап, в ходе которого температура в каждом слое измерительного устройства устанавливается постоянной и равной заранее заданному значению. О завершении подготовительной стадии судят по установлению во времени измеренной среднеинтегральной температуры  $t_0^*$  слоя нагревателя.

На первом этапе включается привод наружного цилиндра и подается мощность на нагреватель внутреннего цилиндра. При этом теплоперенос от внутреннего цилиндра к внешнему будет происходить через слой исследуемой жидкости. Если жидкость вязкая и неньютоновская, подчиняющаяся реологическому закону

$$\sigma_{r\varphi} = m\dot{\gamma}^n,$$

то в ней возникнет источник тепла за счет диссипации механической энергии «вязкого трения», определяемый выражением

$$\Phi(r) = m_0 r^{n+1} \left( 2\omega \frac{r^{-2n-1}}{nr \begin{pmatrix} -2n-1 & -2n-1 \\ R_4 & -R_5 \end{pmatrix}} \right)^{(n+1)}.$$

Когда через некоторое время во всех слоях измерительного устройства установится стационарный тепловой режим, регистрируется значение  $t^*$  среднеинтегральной температуры в слое нагревателя, вычисляется и регистрируется избыточная среднеинтегральная температура  $T^* = t^* - t_0^*$ , и на этом первый этап эксперимента заканчивается.

На втором этапе отключают нагреватель и регистрируют изменение во времени среднеинтегральной температуры  $T^*$  слоя 3 цилиндрической системы измерительного устройства.

Таким образом, исходная обратная задача теплопроводности разбивается на две, соответствующие стационарному и нестационарному этапам эксперимента. Математическое описание данных задач приведено ниже.

Дифференциальные уравнения, описывающие распределение температур в слоях 1–4 измерительного устройства в установившемся стационарном режиме, примут следующий вид:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT_1^*(r)}{dr} \right) = 0, \quad R_1 < r < R_2;$$

$$\frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT_2^*(r)}{dr} \right) + \frac{Q_H}{V_H c_2 \rho_2} = 0, \quad R_2 < r < R_3;$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT_3^*(r)}{dr} \right) = 0, \quad R_3 < r < R_4;$$

$$\lambda_{rr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT_4^*(r)}{dr} \right) + m r^{n+1} \left( 2\omega \frac{r^{-2n-1}}{nr \begin{pmatrix} -2n-1 & -2n-1 \\ R_4 & -R_5 \end{pmatrix}} \right)^{(n+1)} = 0, \quad R_4 < r < R_5, \quad (7)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 T_1^*(R_1) &= T_0 = \text{const}; \\
 T_1^*(R_{i+1}) &= T_{i+1}^*(R_{i+1}); \\
 \lambda_i \frac{dT_i^*(R_{i+1})}{dr} &= \lambda_{i+1} \frac{dT_{i+1}^*(R_{i+1})}{dr}; \\
 T_4^*(R_5) &= T_0 = \text{const}; \quad i = 1, 2, 3,
 \end{aligned} \tag{8}$$

и дополнительным условием

$$T^* = \frac{2}{R_3^2 - R_2^2} \int_{R_2}^{R_3} T_2(r) r dr. \tag{9}$$

**Решение обратной задачи для определения теплопроводности  
неньютоновских жидкостей со степенным законом течения  
для стационарной стадии метода измерения**

Общие решения исходных дифференциальных уравнений (7) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 T_1^*(r) &= C_1 \ln(r) + C_2, & R_1 < r < R_2; \\
 T_2^*(r) &= -\frac{Q_H r^2}{4V_H \lambda_H} + C_3 \ln(r) + C_4, & R_2 < r < R_3; \\
 T_3^*(r) &= C_5 \ln(r) + C_6, & R_3 < r < R_4; \\
 T_4^*(r) &= \Phi'(r) + C_7 \ln(r) + C_8, & R_4 < r < R_5,
 \end{aligned} \tag{10}$$

где  $\Phi'(r)$ ,  $A(\omega)$  – функции, описываемые выражениями:

$$\begin{aligned}
 \Phi'(r) &= -\frac{A(\omega)}{\lambda_{rr}} \left[ \frac{r^{-1-2n^{-1}}}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} \right]; \\
 A(\omega) &= \frac{m(2\omega)^{n+1}}{\left[ n(R_4^{-2n^{-1}} - R_5^{-2n^{-1}}) \right]^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

Объем слоя нагревателя рассчитывается по формуле

$$V_H = (R_3^2 - R_2^2) \pi l.$$

Подстановкой общих решений (10) в граничные условия (8) и дополнительное условие (9) получаем систему уравнений, из которой находится расчетная зависимость для теплопроводности

$$\lambda_{rr} = \frac{A_2 \frac{\lambda_3}{R_4} + A(\omega) f^2(n) \frac{R_5^{-1-2n^{-1}} - R_4^{-1-2n^{-1}}}{(\ln R_4 - \ln R_5) R_4} - A(\omega) f(n) R_4^{-2-2n^{-1}}}{A_2 \ln R_4 + A_1} \times$$

$$\times R_4 (\ln R_4 - \ln R_5), \quad (11)$$

где  $A_1, A_2$  – коэффициенты, значения которых зависят от геометрических параметров измерительного устройства, измеренного значения среднеинтегральной избыточной температуры  $T^*$ , индекса течения и других величин, определяемые по формулам:

$$A_1 = A_3 \ln R_3 + A_4 - A_2 \ln R_3 - \frac{R_3^2}{4} \frac{Q_H}{\lambda_2 V_H};$$

$$A_2 = \left( A_4 \frac{\lambda_2}{R_3} - R_3 \frac{Q_H}{2V_H} \right) \frac{R_3}{\lambda_3};$$

$$f(n) = \frac{n}{n+2}.$$

Значения коэффициентов  $A_3, A_4$  и параметров  $Q_0, Q_1$  и  $K$  вычисляются с использованием зависимостей:

$$A_3 = \frac{T^* + Q_1 - A_4}{K};$$

$$A_4 = \frac{\left( Q_0 + \frac{T^* + Q_1}{K} \ln R_2 \right) \lambda_1}{\left( 1 - \frac{\ln R_2}{\ln R_1} \right) \ln R_1 R_2} + \frac{T^* + Q_1}{K} \frac{\lambda_2}{R_2} - \frac{Q R_2}{2V_H};$$

$$\left( \frac{\frac{\ln R_2}{K} - 1}{1 - \frac{\ln R_2}{\ln R_1}} \right) \frac{\lambda_1}{\ln R_1 R_2} + \frac{\lambda_2}{K R_2}$$

где

$$Q_0 = -\frac{R_2^2}{4} \frac{Q_H}{V_H \lambda_2};$$

$$Q_1 = \frac{Q_H (R_3^4 - R_2^4)}{8 \lambda_2 V_H (R_3^2 - R_2^2)};$$

$$K = \frac{\left( \ln R_3 - \frac{1}{2} \right) R_3^2 - \left( \ln R_2 - \frac{1}{2} \right) R_2^2}{R_3}.$$

**Решение обратной задачи для определения ТФХ  
неньютоновских жидкостей со степенным законом течения  
для нестационарной стадии метода измерения**

При отключении нагревателя измерительного устройства на втором этапе эксперимента нестационарное температурное поле описывается следующей математической моделью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}_1(r, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\lambda_1}{c_1 \rho_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{T}_1(r, \tau)}{\partial r} \right), & R_1 < r < R_2, \tau > \tau^*; \\ \frac{\partial \tilde{T}_2(r, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{T}_2(r, \tau)}{\partial r} \right), & R_2 < r < R_3, \tau > \tau^*; \\ \frac{\partial \tilde{T}_3(r, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\lambda_3}{c_3 \rho_3} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{T}_3(r, \tau)}{\partial r} \right), & R_3 < r < R_4, \tau > \tau^*; \\ \frac{\partial \tilde{T}_4(r, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\lambda_{rr}}{c_x \rho_x} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{T}_4(r, \tau)}{\partial r} \right) + \frac{\Phi(r)}{c_x \lambda_{rr}}, & R_4 < r < R_5, \tau > \tau^*, \end{aligned}$$

начальные условия (условно принимаем  $\tau^* = 0$ ):

$$\tilde{T}_1(r, 0) = T_1^*(r); \quad \tilde{T}_2(r, 0) = T_2^*(r); \quad \tilde{T}_3(r, 0) = T_3^*(r); \quad \tilde{T}_4(r, 0) = T_4^*(r),$$

граничные условия:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1(R_1, \tau) &= T_0 = 0; \\ \tilde{T}_1(R_2, \tau) &= \tilde{T}_2(R_2, \tau); \quad \lambda_1 \frac{d\tilde{T}_1(R_2, \tau)}{dr} = \lambda_2 \frac{d\tilde{T}_2(R_2, \tau)}{dr}; \\ \tilde{T}_2(R_3, \tau) &= \tilde{T}_3(R_3, \tau); \quad \lambda_2 \frac{d\tilde{T}_2(R_3, \tau)}{dr} = \lambda_3 \frac{d\tilde{T}_3(R_3, \tau)}{dr}; \\ \tilde{T}_3(R_4, \tau) &= \tilde{T}_4(R_4, \tau); \quad \lambda_3 \frac{d\tilde{T}_3(R_4, \tau)}{dr} = \lambda_{rr} \frac{d\tilde{T}_4(R_4, \tau)}{dr}; \\ \tilde{T}_4(R_5, \tau) &= T_0 = 0. \end{aligned}$$

Применяя преобразование Лапласа

$$\hat{T}(r, p) = \int_0^{\infty} \hat{T}(r, \tau) e^{-p\tau} d\tau,$$

а также учитывая, что  $a_i = \frac{\lambda_i}{c_i \rho_i}$ ,  $a_{rr} = \frac{\lambda_{rr}}{c_x \rho_x}$ , перепишем приведенную выше математическую модель следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{T}_1(r, p)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{T}_1(r, p)}{dr} - \frac{p}{a_1} \hat{T}_1(r, p) &= -\frac{T_1^*(r)}{a_1}, & R_1 < r < R_2; \\ \frac{d^2 \hat{T}_2(r, p)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{T}_2(r, p)}{dr} - \frac{p}{a_2} \hat{T}_2(r, p) &= -\frac{T_2^*(r)}{a_2}, & R_2 < r < R_3; \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\hat{T}_3(r,p)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{T}_3(r,p)}{dr} - \frac{p}{a_3} \hat{T}_3(r,p) = -\frac{T_3^*(r)}{a_3}, \quad R_3 < r < R_4;$$

$$\frac{d^2\hat{T}_4(r,p)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{T}_4(r,p)}{dr} - \frac{p}{a_{rr}} \hat{T}_4(r,p) = -\frac{T_4^*(r)}{a_{rr}} + \frac{\Phi(r)}{p\lambda_{rr}}, \quad R_4 < r < R_5, \quad (12)$$

где  $p$  – действительное число,  $c^{-1}$ .

Граничные условия будут иметь вид:

$$\hat{T}_1(R_1, p) = T_0 = 0;$$

$$\hat{T}_1(R_2, p) = \hat{T}_2(R_2, p); \quad \lambda_1 \frac{d\hat{T}_1(R_2, p)}{dr} = \lambda_2 \frac{d\hat{T}_2(R_2, p)}{dr};$$

$$\hat{T}_2(R_3, p) = \hat{T}_3(R_3, p); \quad \lambda_2 \frac{d\hat{T}_2(R_3, p)}{dr} = \lambda_3 \frac{d\hat{T}_3(R_3, p)}{dr};$$

$$\hat{T}_3(R_4, p) = \hat{T}_4(R_4, p); \quad \lambda_3 \frac{d\hat{T}_3(R_4, p)}{dr} = \lambda_{rr} \frac{d\hat{T}_4(R_4, p)}{dr};$$

$$\hat{T}_4(R_5, p) = T_0 = 0.$$

Неоднородные дифференциальные уравнения (12) можно записать в следующем обобщенном виде:

$$\frac{d^2}{dr^2} [\hat{T}(r, p)] + \frac{1}{r} \frac{d\hat{T}(r, p)}{dr} - \frac{p}{a} \hat{T}(r, p) = W(r). \quad (13)$$

Пусть  $r = i\sqrt{\frac{a}{p}}x$ , тогда  $x = -i\sqrt{\frac{p}{a}}r$ ,  $\frac{d\hat{T}}{dr} = \frac{d\hat{T}}{dx} \left( -i\sqrt{\frac{p}{a}} \right) = -i\sqrt{\frac{p}{a}} \frac{d\hat{T}}{dx}$ ;

$$\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} = \left( -i\sqrt{\frac{p}{a}} \right)^2; \quad \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2} = -\frac{p}{a} \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2}.$$

Следовательно, уравнение (13) примет вид

$$-\frac{p}{a} \hat{T}'' - \frac{p}{a} \frac{1}{x} \hat{T}' - \frac{p}{a} \hat{T} = W \left( -i\sqrt{\frac{a}{p}}x \right).$$

Умножив обе части получившегося уравнения на  $\left( -\frac{a}{p}x^2 \right)$ , получим

$$x^2 \hat{T}'' + x \hat{T}' + x^2 \hat{T} = -\frac{a}{p} x^2 W \left( i\sqrt{\frac{a}{p}}x \right).$$

Таким образом, уравнение (13) можно записать в виде

$$x^2 u'' + xu' + x^2 u = f(x), \quad (14)$$



где

$$x = -i\sqrt{\frac{p}{a}}r, \quad r = i\sqrt{\frac{a}{p}}x;$$

$$u = u(p, x) = \hat{T}\left(p, i\sqrt{\frac{a}{p}}x\right) = \hat{T}(p, r);$$

$$f(x) = -\frac{a}{p}x^2W\left(i\sqrt{\frac{a}{p}}x\right) = r^2W(r).$$

Для уравнения (14) построена функция Грина [4], с помощью которой получено общее решение

$$u(p, x) = C_1J_0(x) + C_2Y_0(x) + \frac{\pi}{2}Y_0(x)\int x^{-1}J_0(x)f(x)dx - \frac{\pi}{2}J_0(x)\int x^{-1}Y_0(x)f(x)dx. \quad (15)$$

Так как  $x = -i\sqrt{\frac{p}{a}}r$ , то решение уравнения (14) можно записать в виде:

$$\hat{T}(p, r) = C_1A_1(p, r) + C_2A_2(p, r) + B(p, r); \quad (16)$$

$$A_1(p, r) = J_0\left(-i\sqrt{\frac{p}{a}}r\right);$$

$$A_2(p, r) = Y_0\left(-i\sqrt{\frac{p}{a}}r\right);$$

$$B(p, r) = \frac{\pi}{2}A_2(p, r)\int rW(r)A_1(p, r)dr - \frac{\pi}{2}A_1(p, r)\int rW(r)A_2(p, r)dr.$$

Из (16) находим

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{T}}{dr} &= \left[C_1 - \frac{\pi}{2}\int rW(r)A_2(p, r)dr\right]\frac{dA_1(p, r)}{dr} + \left[C_2 + \frac{\pi}{2}\int rW(r)A_1(p, r)dr\right]\frac{dA_2(p, r)}{dr} = \\ &= \left[C_1 - \frac{\pi}{2}\int rW(r)A_2(p, r)dr\right]J_0'\left(-i\sqrt{\frac{p}{a}}r\right)\left(-i\sqrt{\frac{p}{a}}r\right) + \\ &+ \left[C_2 + \frac{\pi}{2}\int rW(r)A_1(p, r)dr\right]Y_0'\left(-i\sqrt{\frac{p}{a}}r\right)\left(-i\sqrt{\frac{p}{a}}r\right). \end{aligned}$$

Запишем задачу (12) в виде:

$$\frac{d^2\hat{T}_k(r, p)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\hat{T}_k(r, p)}{dr} - \frac{p}{a_k}\hat{T}_k(r, p) = W_k, \quad R_k < r < R_{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (a_4 = a_{rr}); \quad (17)$$

$$\hat{T}_1(R_1) = \hat{T}_4(R_5) = 0;$$

$$T_{k-1}(R_k) = T_k(R_k);$$

$$\lambda_{k-1}\frac{d\hat{T}_{k-1}}{dr} = \lambda_k\frac{d\hat{T}_k}{dr}; \quad k = 2, 3, 4, \quad (18)$$

где

$$W_1 = -\frac{T_1^*(r)}{a_1}, W_2 = -\frac{T_2^*(r)}{a_2}, W_3 = -\frac{T_3^*(r)}{a_3}, W_4 = -\frac{T_4^*(r)}{a_{rr}} + \frac{\Phi(r)}{p\lambda_{rr}}.$$

Запишем общее решение задачи (17) в виде

$$\hat{T}_k = C_k^{(1)}A_k^{(1)}(r) + C_k^{(2)}A_k^{(2)}(r) + B_k(r), \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (19)$$

Используя, граничные условия (18), а также значение экспериментально определяемой среднеинтегральной температуры

$$\hat{T}^* = \frac{2}{R_3^2 - R_2^2} \int_{R_2}^{R_3} [C_2^{(1)}A_2^{(1)}(p, r) + C_2^{(2)}A_2^{(2)}(p, r) + B_2(p, r)] r dr = \int_0^\infty \tilde{T}^*(\tau) e^{-p\tau} d\tau,$$

получаем систему уравнений, решая которую находим неизвестные коэффициенты  $C_k^{(1)}, C_k^{(2)}$ , а также значение коэффициента теплопроводности  $a_4$  исследуемой жидкости. Задавая двумя значениями  $p$ , можно определить также значение  $\lambda_{rr}$ , сравнить его со значением, полученным на первом этапе эксперимента и, таким образом, проверить корректность решения задачи, повысить надежность полученных результатов измерений.

### Погрешности измерения теплопроводности неньютоновских жидкостей при сдвиговом течении

Теплофизический эксперимент осуществляется с использованием компьютерной измерительной системы [5], работающей под управлением программы, разработанной в среде LabView 9. Эта среда позволяет создавать виртуальные приборы, в которых функцию измерений и обработки экспериментальных данных выполняет персональный компьютер, оснащенный платой сбора данных.

Графики зависимости относительной погрешности определения теплопроводности в заданном диапазоне измерения при различных значениях коэффициента консистенции  $m$  исследуемой неньютоновской жидкости показаны на рис. 3.

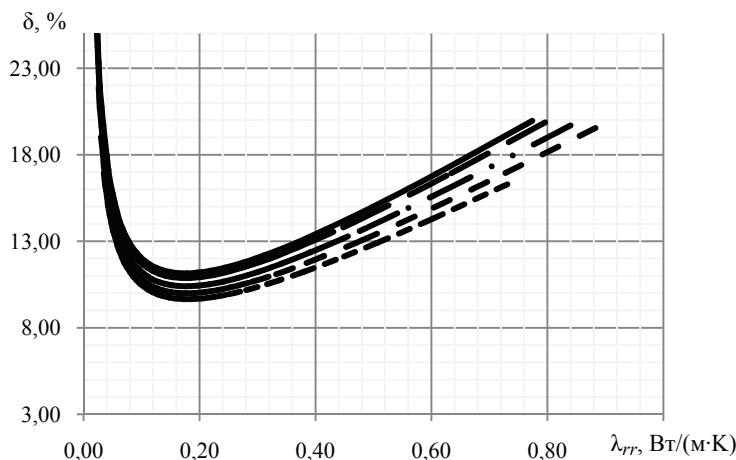


Рис. 3. Зависимость погрешности косвенного измерения теплопроводности исследуемой жидкости от значения теплопроводности при различных значениях коэффициента консистенции  $m$ , Па·с<sup>*n*</sup>: — 50; — — 100; — • — 200; - - - 300; - · - 400

Погрешности косвенного измерения теплопроводности были определены расчетным путем по известным погрешностям измерений среднеинтегральной температуры, крутящего момента, коэффициента консистенции, а также индекса течения. Как видно из графика, наиболее приемлемая погрешность 9–12 % находится в интервале значений теплопроводности 0,1...0,4 Вт/(м·К), что соответствует теплопроводности большинства расплавов и растворов полимеров. Для косвенного измерения теплопроводности жидкостей в неподвижном состоянии погрешность гораздо ниже и составляет 5–8 %.

#### *Список литературы*

1. Van den Brule, В.Н.А.А. A Network Theory for the Thermal Conductivity of an Amorphous Polymeric Material / В.Н.А.А. van den Brule // *Rheol. Acta.* – 1989. – Vol. 28, No 4. – P. 257–266.
2. Теоретические и практические основы теплофизических измерений : монография / С.В. Пономарев [и др.]. – М. : Физматлит, 2008. – 408 с.
3. Wallace, D.J. Shear Dependence of Thermal Conductivity in Polyethylene Melts / D.J. Wallace, C. Moreland, J.J.C. Picot // *Polym. Eng. Sci.* – 1985. – № 25. – P. 70–74.
4. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Г. Васильева, А.Г. Свешников. – М. : Наука, 1985. – 232 с.
5. Автоматизированная измерительная установка для исследования зависимости теплопроводности и реологических характеристик неньютоновских жидкостей от скорости сдвига / А.Г. Дивин [и др.] // *Приборы и техника эксперимента.* – 2008. – № 3. – С. 163–172.

---

### **Technique for Determination of Thermo-Physical Properties of Non-Newton Liquid Materials under Shift Flow with Regard for Dissipation of Mechanical Energy of “Viscous Friction”**

A.G. Divin<sup>1</sup>, S.V. Ponomarev<sup>1</sup>, S.V. Mishchenko<sup>1</sup>,  
A.I. Urusov<sup>2</sup>, M.A. Petrasheva<sup>1</sup>, D.A. Divina<sup>1</sup>

*Departments: “Quality Management and Certification”, (1);  
“Higher Mathematics”, (2), TSTU; dv63@rambler.ru*

**Key words and phrases:** dissipation; measuring device; non-Newton liquids; shift flow; temperature conductivity; heat capacity; heat conductivity.

**Abstract:** The paper presents the physical model of measuring device enabling to implement the technique for determining thermo-physical properties of non-Newton liquid materials in conditions of shift flow by dividing the original task of heat conductivity into two ones – referring to stationary and non-stationary stages of the experiment.

---

### **Methode der Bestimmung der wärme-physikalischen Charakteristiken der nenjntonischen Flüssigstoffen bei dem Schiebefließen mit Rücksicht auf Dissipation der mechanischen Energie “der Zähreibung”**

**Zusammenfassung:** Es ist das physikalische Modell der Meßeinrichtung, die die Methode der Bestimmung der Abhängigkeiten der wärme-physikalischen Charakteristiken der nenjntonischen Flüssigstoffen bei dem Schiebefließen durch die

Dekomposition der Ausgangsaufgabe der Wärmeleitfähigkeit in zwei den stationären und nichtstationären Etappen des Experimentes entsprechenden Aufgaben zu realisieren erlaubt, vorgeschlagen.

---

**Méthode de la définition des caractéristiques thermo-physiques  
des matériaux liquides non newtoniens lors de l'écoulement  
à décalage compte tenu de la dissipation de l'énergie  
mécanique du "frottement visqueux"**

**Résumé:** Est proposé le modèle physique du dispositif de mesure permettant de définir des caractéristiques thermo-physiques des matériaux liquides non newtoniens dans les conditions de l'écoulement à décalage par le fractionnement du problème initial de la conductibilité de la chaleur en deux correspondant aux étapes stationnaires et non stationnaires de l'expérience.

---

**Авторы:** *Дивин Александр Георгиевич* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Управление качеством и сертификация»; *Пономарев Сергей Васильевич* – доктор технических наук, профессор кафедры «Управление качеством и сертификация»; *Мищенко Сергей Владимирович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Управление качеством и сертификация», ректор; *Урусов Александр Иванович* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика»; *Петрашева Мария Александровна* – магистрант кафедры «Управление качеством и сертификация»; *Дивина Дарья Александровна* – студент, ГОУ ВПО «ТГТУ».

**Рецензент:** *Чуриков Александр Алексеевич* – доктор технических наук, профессор кафедры «Управление качеством и сертификация», ГОУ ВПО «ТГТУ».

---