УДК 517.925.52

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

А.Н. Пчелинцев[1], В.Е. Подольский[2], А.Ю. Поветьев[2]

Кафедры: «Распределенные вычислительные системы» (1); «Системы автоматизированного проектирования» (2), ГОУ ВПО «ТГТУ»; pchela9091@rambler.ru

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: критерий Бендиксона; область сходимости; система Лоренца; степенные ряды; теорема Барбашина–Красовского.

Аннотация: Описывается метод, позволяющий строить приближенные решения динамической системы Лоренца с помощью степенных рядов. Предложен способ определения области сходимости этих рядов. Анализируются некоторые свойства решений системы Лоренца – асимптотическая устойчивость в целом и существование периодических решений при определенных соотношениях параметров системы.

Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - b x_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где σ, r и b – некоторые положительные числа, параметры системы [1].

Обозначим через

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Как известно [1, с. 102] в системе (1) при $r < 1$ существует одно устойчивое положение равновесия $O(0,0,0)$. Однако насколько нам известно, асимптотическая устойчивость в целом тривиального решения $x = 0$ при $r < 1$ не доказана.

В силу того, что система (1) имеет полиномиальную правую часть, ее решения могут быть получены в виде степенных рядов, коэффициенты которых вычисляются по рекуррентным соотношениям, не прибегая к символьному дифференцированию [2]. При этом в численном эксперименте было выяснено, что при достаточно больших значениях начальных условий область сходимости этих рядов существенно уменьшается.

Покажем асимптотическую устойчивость в целом тривиального решения $x=0$ при $r<1$ и получим формулы, выражающие длину Δt отрезка сходимости степенных рядов, являющихся решением системы (1). Также интересным представляется случай, когда $b=2\sigma$.

Асимптотическая устойчивость в целом тривиального решения $x=0$ при $r<1$

Определим для системы (1) функцию

$$v(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{\sigma}+x_2^2+x_3^2\right).$$

Производная по времени этой функции с силу правых частей системы (1) равна

$$\dot{v}=-\left(\frac{r+1}{2}x_1-x_2\right)^2-\left(1-\frac{(r+1)^2}{4}\right)x_1^2-bx_3^2.$$

Эта производная, очевидно, отрицательно определена для всех $x\neq 0$ при $r<1$. При этом $v(x)\geq 0,$ $v(0)=0$ и $v(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$. Тогда по теореме Барбашина–Красовского [3] тривиальное решение $x=0$ асимптотически устойчиво в целом.

Построение решений системы уравнений Лоренца

Будем отыскивать координаты решения системы (1) в виде рядов:

$$x_1(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i t^i;\ \ x_2(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i t^i;\ \ x_3(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i t^i, \tag{2}$$

где коэффициенты α_0, β_0 и γ_0 составляют вектор начального условия.

Применяя процедуру символьного дифференцирования [4] для расчета коэффициентов степенных рядов, можно построить решения нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с заданной точностью в распределенной вычислительной среде. Однако ввиду того, что система (1) имеет полиномиальную правую часть, получим формулы для расчета коэффициентов рядов (2).

Для этого сначала продифференцируем (2):

$$\dot{x}_1=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\alpha_{i+1}t^i;\ \ \dot{x}_2=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\beta_{i+1}t^i;\ \ \dot{x}_3=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\gamma_{i+1}t^i.$$

Далее найдем произведения степенных рядов в форме Коши:

$$x_1x_3=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\alpha_j\gamma_{i-j}t^i;\ \ x_1x_2=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\alpha_j\beta_{i-j}t^i.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, из системы (1) получаем рекуррентные соотношения для расчета коэффициентов степенных рядов (2):

$$\alpha_{i+1} = \frac{\sigma(\beta_i - \alpha_i)}{i+1};$$

$$\beta_{i+1} = \frac{r\alpha_i - \beta_i - \sum_{j=0}^{i} \alpha_j \gamma_{i-j}}{i+1};$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{\sum_{j=0}^{i} \alpha_j \beta_{i-j} - b\gamma_i}{i+1}. \qquad (3)$$

Несмотря на то что система (1) диссипативна и ее правая часть всюду аналитична, численный эксперимент показал, что область сходимости рядов (2) ограничена. Поэтому описанным способом мы можем получить только часть траектории. Процедура построения дуги траектории системы (1) на любом отрезке времени приведена в работе [2]. Использование высокоточных вычислений при этом уменьшает систематическую ошибку получаемого решения.

Область сходимости степенных рядов (2)

Введем обозначения:

$$h_1 = \max(2\sigma, r + 2h_2 + 1, b + 2h_2); \qquad h_2 = \max(|\alpha_0|, |\beta_0|, |\gamma_0|).$$

Если $h_2 \ge 1$, то $h_3 = h_1 h_2$. Иначе $h_3 = \max(2\sigma, r + 2, b + 1)$. Докажем, что длина полуотрезка сходимости рядов (2) равна $\Delta t = 1/h_3$. Для этого нужно подобрать число h_3 так, причем $h_3 t < 1$, чтобы

$$|\alpha_i t^i| \le (h_3 t)^i; \qquad |\beta_i t^i| \le (h_3 t)^i; \qquad |\gamma_i t^i| \le (h_3 t)^i.$$

Тогда ряды (2) будут сходится по признаку сравнения для $t \in [0, 1/h_3)$.

Рассмотрим первый случай, когда $h_2 \ge 1$. Таким образом, нужно доказать справедливость следующего утверждения:

$$|\alpha_i| \le h_3^i; \qquad |\beta_i| \le h_3^i; \qquad |\gamma_i| \le h_3^i, \qquad (4)$$

где $h_3 = h_1 h_2$, для любого натурального i. Доказательство будем вести по методу математической индукции.

Покажем, что утверждение (4) верно при $i = 1$. По формулам (3):

$$\alpha_1 = \sigma(\beta_0 - \alpha_0); \ \beta_1 = r\alpha_0 - \beta_0 - \alpha_0\gamma_0; \ \gamma_1 = \alpha_0\beta_0 - b\gamma_0.$$

Тогда:

$$|\alpha_1| \le 2\sigma h_2 \le h_3^1; \ |\beta_1| \le rh_2 + h_2 + h_2^2 \le h_3^1; \ |\gamma_1| \le (b + h_2)h_2 \le h_3^1,$$

что и доказывает справедливость утверждения (4) при $i = 1$.

Предположим, что утверждение (4) верно при $i = k$. Тогда оно верно для любого $j = \overline{1, k}$, то есть:

$$|\alpha_j| \le h_3^j; \ |\beta_j| \le h_3^j; \ |\gamma_j| \le h_3^j. \qquad (5)$$

Докажем справедливость (4) для $i = k+1$. Из формул (3) получаем оценку

$$|\alpha_{k+1}| \le \frac{\sigma}{k+1}(|\beta_k| + |\alpha_k|).$$

Так как $k \ge 1$, в соответствии с неравенствами (5) получим

$$|\alpha_{k+1}| \le 2\sigma h_3^k \le h_3^{k+1}.$$

Далее

$$\left|\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \gamma_{k-j}\right| \le |x_0| h_3^k + h_3^k |y_0| + \sum_{j=1}^{k-1} h_3^j h_3^{k-j} \le 2h_2 h_3^k + (k-1)h_3^k,$$

аналогично

$$\left|\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \beta_{k-j}\right| \le 2h_2 h_3^k + (k-1)h_3^k,$$

тогда

$$|\beta_{k+1}| \le \left(\frac{r+2h_2}{k+1} + \frac{k}{k+1}\right) h_3^k \le (r + 2h_2 + 1)h_3^k \le h_3^{k+1}$$

и

$$|\gamma_{k+1}| \le (b + 2h_2)h_3^k \le h_3^{k+1},$$

что и доказывает справедливость утверждения (4) для любого натурального i при $h_2 \ge 1$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $h_2 < 1$. Докажем по индукции справедливость (4) для этого случая. При $i = 1$ имеем:

$$|\alpha_1| \le 2\sigma \le h_3^1; \ |\beta_1| \le r + 1 + 1 \cdot 1 \le h_3^1; \ |\gamma_1| \le 1 \cdot 1 + b \le h_3^1.$$

Следовательно, при $i = 1$ утверждение (4) верно.

Предположим, что (4) верно при $i = k$. Докажем справедливость (4) для $i = k+1$. Из формул (3) и предположения справедливости следует, что

$$|\alpha_{k+1}| \le 2\sigma h_3^k \le h_3^{k+1}$$

и

$$\left|\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \gamma_{k-j}\right| \le 1 \cdot h_3^k + h_3^k \cdot 1 + (k-1)h_3^k \le (k+1)h_3^k,$$

аналогично

$$\left|\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \beta_{k-j}\right| \le (k+1)h_3^k,$$

тогда

$$|\beta_{k+1}| \le \frac{rh_3^k + h_3^k + (k+1)h_3^k}{k+1} \le (r+2)h_3^k \le h_3^{k+1}$$

и

$$|\gamma_{k+1}| \le (1+b)h_3^k \le h_3^{k+1},$$

что и доказывает справедливость утверждения (4) для любого натурального i при $h_2 < 1$.

Случай $b = 2\sigma$

Докажем, что если $b = 2\sigma$, то в системе (1) нет периодических решений (исключая, конечно, положения равновесия).

Сделаем замену

$$x_3 = u + \frac{x_1^2}{b}, \tag{6}$$

где u – некоторая функция от t. Продифференцируем формулу (6), получим

$$\dot{x}_3 = \dot{u} + \frac{2x_1}{b}\dot{x}_1. \tag{7}$$

В левую часть выражения (7) подставим правую часть третьего уравнения системы (1), а в правую часть (7) – правую часть первого уравнения системы (1), учитывая, что $b = 2\sigma$. Получим

$$-bx_3 = \dot{u} - x_1^2. \tag{8}$$

Вместо x_3 в формулу (8) подставим выражение (6), откуда имеем уравнение

$$\dot{u} = -bu,$$

решением которого является функция

$$u(t) = u_0 \mathrm{e}^{-bt}, \tag{9}$$

где u_0 – начальное условие.

Теперь во второе уравнение системы (1) подставим вместо x_3 выражение (6). При этом выразим x_2 из первого уравнения системы (1). Получим

$$x_2 = x_1 + \frac{\dot{x}_1}{\sigma} \tag{10}$$

и

$$\dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1\left(u + \frac{x_1^2}{2\sigma}\right). \tag{11}$$

Подставив выражения (9) и (10) в (11), имеем

$$\ddot{x}_1 + (\sigma+1)\dot{x}_1 - \sigma(r-1)x_1 + \frac{x_1^3}{2} = -\sigma u_0 \mathrm{e}^{-bt} x_1. \tag{12}$$

Рассмотрим неавтономный случай, когда $u_0 \neq 0$ в уравнении (12). Предположим, что в этом случае уравнение (12) имеет периодическое решение $x_1^*(t)$ с периодом T. Так как $x_1^*(t)$ – скалярная функция, то

$$\dot{x}_1^*(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_1^*(t+\Delta t) - x_1^*(t)}{\Delta t}.$$

В силу периодичности функции $x_1^*(t)$, имеем

$$\dot{x}_1^*(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_1^*(t+T+\Delta t) - x_1^*(t+T)}{\Delta t} = \dot{x}_1^*(t+T),$$

то есть производная периодической функции с периодом T есть периодическая функция с периодом T. Тогда левая часть уравнения (12) является периодической функцией с периодом T. Однако правая часть уравнения (12) непериодична, так как e^{-bt} не является периодической функцией. Получили противоречие. Таким образом, при $u_0 \neq 0$ уравнение (12) не имеет периодических решений.

Рассмотрим теперь случай, когда $u_0 = 0$. Имеем автономное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}_1 + (\sigma+1)\dot{x}_1 - \sigma(r-1)x_1 + \frac{x_1^3}{2} = 0,$$

у которого по критерию Бендиксона [5, с. 142, 143] нет периодических решений, что и доказывает их отсутствие в системе Лоренца при $b = 2\sigma$. Заметим, что в этом случае параметр r может принимать любые значения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №10-07-00136).

Список литературы

1. Лоренц, Э.Н. Детерминированное непериодическое течение / Э.Н. Лоренц ; пер. с англ. под ред. Я.Г. Синая, Л.И. Шильникова. – М. : Мир, 1981. – 116 с.

2. Пчелинцев, А.Н. Об одной гипотезе структуры аттрактора Лоренца / А.Н. Пчелинцев // Актуальные проблемы информатики и информационных технологий : материалы XII междунар. науч.-практ. Конф.-выставки. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. ун-та им. Г.Р. Державина. – 2008. – С. 155–158.

3. Барбашин, Е.А. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом / Е.А. Барбашин, Н.Н. Красовский // Прикладная математика и механика. – 1954. – Т. 18, вып. 3. – С. 345–350.

4. Пчелинцев, А.Н. Об отыскании обобщенно-периодических решений автономных систем дифференциальных уравнений в распределенной компьютерной среде с использованием символьных вычислений / А.Н. Пчелинцев, В.А. Погонин // Системы управления и информационные технологии. – 2009. – № 2 (36). – С. 27–31.

5. Немыцкий, В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 552 с.

About Some Properties of Lorenz System Solutions

A.N. Pchelintsev[1], V.E. Podolsky[2], A.Yu. Povetyev[2]

Department: "Distributed Computer Systems" (1),
"Computer-Aided Design Systems" (2),
TSTU; pchela9091@rambler.ru

Key words and phrases: Barbashin–Krasovsky theorem; Bendixon criterion; convergence area; Lorenz system; power series.

Abstract: The paper describes the technique enabling to construct approximate solutions to Lorenz dynamic system with the power series aid. The way to determine the convergence area of the power series is proposed. Some properties of Lorenz system solutions like asymptotic steadiness on the whole and the existence of periodical solutions to Lorenz system under certain correlation of system parameters are analyzed as well.

Über einigen Eigenschaften der Lösungen des Lorenz-Systems

Zusammenfassung: Im Artikel wird die Methode, die die Annäherungslösungen des dynamischen Lorenz-Systems mit Hilfe der Potenzreihen zu bauen erlaubt, beschrieben. Es ist das Verfahren der Bestimmung des Gebietes der Konvergenz dieser Reihen vorgeschlagen. Es werden auch die einigen Eigenschaften der Lösungen des Lorenz-Systems analysiert. Das sind die asymptotische Standfestigkeit im ganzen und die Existenz der periodischen Lösungen bei den bestimmten Korrelationen der Systemparameter.

Sur quelques propriétés de la solution du problème du système de Lorenz

Résumé: Dans l'article est décrite la méthode permettant de construire une solution approximative de la solution du problème du système dynamique de Lorenz à l'aide des séries entières. Est proposé un moyen de la définition du domaine de la convergence de ces séries. Sont aussi analysées quelques propriétés de la solution du problème du système de Lorenz – c'est la stabilité asymptotique en général et l'existence des solutions périodiques lors des corrélations définies des paramètres des systèmes.

Авторы: ***Пчелинцев Александр Николаевич*** – ассистент кафедры «Распределенные вычислительные системы»; ***Подольский Владимир Ефимович*** – доктор технических наук, профессор, проректор по информатизации, заведующий кафедрой «Системы автоматизированного проектирования»; ***Поветьев Алексей Юрьевич*** – студент, ГОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Куликов Геннадий Михайлович*** **–** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ».