УДК 539.3

НОВАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Б.Е. Победря, А.В. Леонов

Кафедра «Композитные материалы»,
ГОУ ВПО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»;
anton.v.leonov@gmail.com

Представлена членом редколлегии профессором С.В. Мищенко

Ключевые слова и фразы: несимметричная теория упругости; среда Коссера; уравнения равновесия; уравнения совместности; эллиптичность системы.

Аннотация: Исследована новая постановка задачи деформации в среде Коссера. Получены условия правильной эллиптичности системы уравнений совместности.

---

1. Уравнения движения

Деформация среды Коссера, описываемой несимметричной теорией упругости, задается двумя кинематическими параметрами: вектором перемещения $\vec{u}$ и вектором поворота $\vec{\omega}$. При этом в рассматриваемом теле возникают помимо напряжений с компонентами σ_{ij} и моментные напряжения μ_{ij} .

Рассмотрим гладкую поверхность A, ограничивающую произвольную область тела, внутрь которого через бесконечно малый элемент поверхности dA действует вектор сил $\vec{p}dA$ и вектор моментов $\vec{m}dA$. С учетом вектора массовых сил $\vec{X}$ и вектора массовых моментов $\vec{Y}$ уравнения равновесия для произвольного объема V имеют вид:

$$\int_A \vec{p}\,dA + \int_V \vec{X}\,dV = 0; \tag{1.1}$$

$$\int_A \left(\vec{r}\times\vec{p}+\vec{m}\right)dA + \int_V \left(\vec{r}\times\vec{X}+\vec{Y}\right)dV = 0, \tag{1.2}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, отсчитываемый от некоторой точки тела.

В прямоугольной декартовой системе координат эти уравнения (1.1) и (1.2) перепишутся следующим образом:

$$\int_A p_i dA + \int_V X_i dV = 0; \tag{1.3}$$

$$\int_A \left(\varepsilon_{ijk} x_j p_k + m_i\right) dA + \int_V \left(\varepsilon_{ijk}\ x_j X_k + Y_i\right) dV = 0, \tag{1.4}$$

где $i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,3},\ k = \overline{1,3}.$

В качестве объема V можно выбрать бесконечно малый тетраэдр $OABC$ с тремя гранями, ортогональными координатным осям. Тогда $\vec{p}^{(1)}$ – вектор силовых напряжений, а $\vec{m}^{(1)}$ – вектор моментных напряжений, действующие на элемент поверхности $dA_1 = dx_2 dx_3$. Соответственно, векторы $\vec{p}^{(2)}$, $\vec{m}^{(2)}$ и $\vec{p}^{(3)}$, $\vec{m}^{(3)}$ действуют на элементы $dA_2 = dx_3 dx_1$ и $dA_3 = dx_1 dx_2$. Составляющие силовых и моментных напряжений обозначаются через σ_{ij} и μ_{ij}, то есть

$$\begin{aligned}
&\vec{p}^{(1)} \equiv (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}); \quad \vec{m}^{(1)} \equiv (\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13});\\
&\vec{p}^{(2)} \equiv (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}); \quad \vec{m}^{(2)} \equiv (\mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23});\\
&\vec{p}^{(3)} \equiv (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}); \quad \vec{m}^{(3)} \equiv (\mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33}).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Пусть n_i означают компоненты единичного вектора нормали $\vec{n}$ к четвертой грани ABC тетраэдра, а $p_i(\vec{n})$ и $m_i(\vec{n})$ – составляющие сил и моментов, действующих на этой грани. Тогда

$$\begin{aligned}
&\vec{p}dA = \vec{p}^{(1)} dA_1 + \vec{p}^{(2)} dA_2 + \vec{p}^{(3)} dA_3;\\
&\vec{m}dA = \vec{m}^{(1)} dA_1 + \vec{m}^{(2)} dA_2 + \vec{m}^{(3)} dA_3.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Поскольку

$$dA_i = dAn_i; \quad n_i = \cos(\vec{n}, x_i); \quad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{1.7}$$

уравнения (1.6) принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\vec{p} = \vec{p}^{(1)} n_1 + \vec{p}^{(2)} n_2 + \vec{p}^{(3)} n_3;\\
&\vec{m} = \vec{m}^{(1)} n_1 + \vec{m}^{(2)} n_2 + \vec{m}^{(3)} n_3.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Учитывая (1.5), из соотношений (1.8) получается, что

$$p_i = \sigma_{ji} n_j; \quad m_i = \mu_{ji} n_j. \tag{1.9}$$

Теперь значения p_i и m_i можно подставить в уравнения (1.3) и (1.4), которые примут вид:

$$\int_A \sigma_{ji} n_j dA + \int_V X_i dV = 0; \tag{1.10}$$

$$\int_A \left(\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l + \mu_{ji} n_j\right) dA + \int_V \left(\varepsilon_{ijk} x_j X_k + Y_i\right) dV = 0. \tag{1.11}$$

Применение к этим уравнениям теоремы Гаусса–Остроградского о дивергенции приведет к следующим уравнениям:

$$\int_V \left(\sigma_{ji,j} + X_i\right) dV = 0; \tag{1.12}$$

$$\int_V \left[\varepsilon_{ijk}\, x_j \left(\sigma_{lk,l} + X_k\right) + \varepsilon_{ijk}\, \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i\right] dV = 0. \tag{1.13}$$

Из (1.12) в силу произвольности объема V следует, что уравнение

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0 \tag{1.14}$$

справедливо в каждой точке тела. В силу этого уравнения первый член в подынтегральном выражении (1.13) равен нулю. Так как объем V выбран произвольно, справедливо соотношение

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i = 0. \tag{1.15}$$

Тензор напряжений σ_{ij} несимметричен. Этот тензор будет симметричен только при отсутствии массовых моментов Y_i и моментных напряжений μ_{ij}. В этом случае уравнение (1.15) сводится к виду $\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{jk} = 0$, что обеспечивает в теории симметричной упругости симметрию тензора $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Уравнения (1.14) и (1.15) являются уравнениями равновесия внутри тела, уравнения (1.9) – уравнениями равновесия на поверхности тела. Соотношения (1.9) можно трактовать и как граничные условия в напряжениях.

«Классическая» постановка задачи несимметричной теории упругости

В дальнейшем вектор массовых сил $\vec{X}$ и вектор массовых моментов $\vec{Y}$ считаются равными нулю. Таким образом, уравнения (1.14) и (1.15) принимают вид:

$$\sigma_{ji,j} = 0, \tag{1.16}$$

$$\varepsilon_{ijk}\;\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} = 0. \tag{1.17}$$

Малые деформации связаны с перемещениями соотношений Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right). \tag{1.18}$$

Чтобы найти перемещения, необходимо решить систему шести дифференциальных уравнений (1.18) относительно трех неизвестных u_i. Необходимым и достаточным условием разрешимости этих уравнений для односвязной области является обращение в нуль симметричного тензора несовместности η

$$\eta_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon}) \equiv \varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{jmn}\,\varepsilon_{kn,lm} = 0. \tag{1.19}$$

Дополнительной кинематической характеристикой для среды Коссера является вектор независимого вращения с компонентами φ_i и тензор его градиента $k_{ij} = \varphi_{i,j}$, который называется тензором искривлений. Несимметричные тензоры можно разложить на симметричные и антисимметричные части:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^S + \sigma_{ij}^A; \\ \mu_{ij} &= \mu_{ij}^S + \mu_{ij}^A; \\ u_{i,j} &= \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}; \\ k_{ij} &= k_{ij}^S + k_{ij}^A, \end{aligned} \tag{1.20}$$

где

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right); \tag{1.21}$$

$$k_{ij}^S = \frac{1}{2}\left(\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}\right); \tag{1.22}$$

$$k_{ij}^A = \frac{1}{2}\left(\varphi_{i,j} - \varphi_{j,i}\right). \tag{1.23}$$

Чтобы найти компоненты вектора вращения по известным функциям k_{ij}^S, необходимо решить систему шести дифференциальных уравнений (1.22) относительно трех неизвестных φ_i. Необходимым и достаточным условием разрешимости этих уравнений для односвязной области является обращение в нуль симметричного тензора несовместности $\underset{\sim}{\eta}$

$$\eta_{ij}\left(\underset{\sim}{k}^S\right) \equiv \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}k_{kn,lm}^S = 0. \tag{1.24}$$

Линейные определяющие соотношения для изотропной среды Коссера в общем случае записываются в виде:

$$\varepsilon_{ij} = a_1\Theta\delta_{ij} + a_3\sigma_{ij}^S + a_1\overset{\circ}{\mu}\delta_{ij} + a_3\mu_{ij}^S; \tag{1.25}$$

$$k_{ij}^S = a_2\overset{\circ}{\mu}\delta_{ij} + a_4\mu_{ij}^S + a_5\Theta\delta_{ij} + a_6\sigma_{ij}^S; \tag{1.26}$$

$$\omega_{ij} = b_1\sigma_{ij}^A + b_3\mu_{ij}^A; \tag{1.27}$$

$$k_{ij}^A = b_3\sigma_{ij}^A + b_2\mu_{ij}^A, \tag{1.28}$$

где $\overset{\circ}{\mu} = \mu_{kk}$, а a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2 и b_3 – независимые упругие константы, которые должны находиться экспериментально.

Граничные условия задаются на поверхности Σ, ограничивающей объем тела:

$$\sigma_{ij}n_j\Big|_{\Sigma} = s_i^0; \tag{1.29}$$

$$\mu_{ij}n_j\Big|_{\Sigma} = S_i^0, \tag{1.30}$$

где n_i – компоненты единичного вектора нормали к поверхности Σ, s_i^0 – компоненты заданных на этой поверхности усилий, а S_i^0 – компоненты заданных на границе моментов.

«Классическая» постановка задачи несимметричной теории упругости в напряжениях заключается в отыскании 18 компонент тензоров σ_{ij} и μ_{ij} в односвязной области $V \in \Re^3$ из решения уравнений совместности (1.19), (1.24) с использованием определяющих соотношений (1.25) – (1.28) и уравнений равновесия (1.16), (1.17) при удовлетворении граничным условиям (1.29), (1.30).

Из уравнений совместности (1.19), (1.24) можно получить обобщенные уравнения совместности для несимметричной теории упругости:

$$\Delta\varepsilon_{ij} + \Theta_{,ij} - \varepsilon_{ik,kj} - \varepsilon_{jk,ki} + \xi(\Delta\Theta - \varepsilon_{kl,kl})\delta_{ij} + Q(\sigma_{ik,kj} + \sigma_{jk,ki}) + R\sigma_{kl,kl}\delta_{ij} = 0; \quad (1.31)$$

$$\Delta k^S_{ij} + \overset{\circ}{k}_{,ij} - k^S_{ik,kj} - k^S_{jk,ki} + \xi'\left(\Delta\overset{\circ}{k} - k^S_{kl,kl}\right)\delta_{ij} + Q'(\mu_{ik,kj} + \mu_{jk,ki}) + R'\mu_{kl,kl}\delta_{ij} +$$
$$+ Q'(\varepsilon_{imn}\sigma_{mn,j} + \varepsilon_{jmn}\sigma_{mn,i}) + R'\varepsilon_{kmn}\sigma_{mn,k}\delta_{ij} = 0, \quad (1.32)$$

где ξ, ξ', Q, Q', R, R' – пока произвольные константы.

В работе [2] доказано следующее утверждение:

Теорема. *Если уравнения равновесия* (1.16), (1.17) *удовлетворяются только на границе:*

$$\sigma_{ji,j}\big|_\Sigma = 0; \quad (1.33)$$

$$(\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j})\big|_\Sigma = 0, \quad (1.34)$$

то при выполнении условий $Q \neq 0$, $Q' \neq 0$, $R \neq \xi Q$, $R' \neq \xi Q'$ *из уравнений* (1.31), (1.32) *следует, что во всей области V удовлетворяются уравнения равновесия* (1.16), (1.17) *и уравнения совместности* (1.19), (1.24).

Таким образом, задача несимметричной теории упругости сводится к решению двенадцати уравнений (1.31) и (1.32) в напряжениях при выполнении двенадцати граничных условий (1.29), (1.30), (1.33) и (1.34). Чтобы выразить антисимметричные компоненты тензоров деформации и искривления в обобщенных уравнениях совместности через компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений, следует сначала обратить определяющие отношения среды для антисимметричных тензоров:

$$\sigma^A_{ij} = B_1\omega_{ij} + B_3 k_{ij}; \quad (1.35)$$

$$\mu^A_{ij} = B_3\omega_{ij} + B_2 k_{ij}, \quad (1.36)$$

где $B_1 = \dfrac{b_2}{b_1 b_2 - b_3^2}$, $B_2 = \dfrac{b_1}{b_1 b_2 - b_3^2}$ и $B_3 = -\dfrac{b_3}{b_1 b_2 - b_3^2}$.

Градиенты тензоров ω_{ij} и k^A_{ij} связаны с градиентами тензоров ε_{ij} и k^S_{ij} тождествами.

После дифференцирования уравнений (1.35) и (1.36) по x_j и использования тождеств [3]

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{kj,i}; \quad (1.37)$$

$$k^A_{ij,k} = k^S_{ki,j} - k^S_{kj,i}, \quad (1.38)$$

связывающих градиенты тензоров ω_{ij} и k^A_{ij} с градиентами тензоров ε_{ij} и k^S_{ij}, получается:

$$\sigma^A_{ij,j} = -\left[(2a_1 + a_3)B_1 + (2a_5 + a_6)B_3\right]\Theta_{,i} - \left[(2a_5 + a_6)B_1 + (2a_2 + a_4)B_3\right]\overset{\circ}{\mu}_{,i} +$$
$$+ (B_1a_3 + B_3a_6)\sigma^S_{ij,j} + (B_1a_6 + B_3a_4)\mu^S_{ij,j}; \qquad (1.39)$$

$$\mu^A_{ij,j} = -\left[(2a_1 + a_3)B_3 + (2a_5 + a_6)B_2\right]\Theta_{,i} - \left[(2a_5 + a_6)B_3 + (2a_2 + a_4)B_2\right]\overset{\circ}{\mu}_{,i} +$$
$$+ (B_3a_3 + B_2a_6)\sigma^S_{ij,j} + (B_3a_6 + B_2a_4)\mu^S_{ij,j}. \qquad (1.40)$$

Обобщенные уравнения совместности (1.31), (1.32) с помощью определяющих соотношений (1.25) – (1.28) и тождеств (1.39), (1.40) записываются в виде

$$a_3\Delta\sigma^S_{ij} + (a_1 + (\xi - RB_1)(2a_1 + a_3) - RB_3(2a_5 + a_6))\Delta\Theta\delta_{ij} +$$
$$+ (-a_1 + (1 - 2QB_1)(2a_1 + a_3) - 2QB_3(2a_5 + a_6))\Theta_{,ij} +$$
$$+ (-a_3 + Q(1 + B_1a_3 + B_3a_6))\left(\sigma^S_{ik,kj} + \sigma^S_{jk,ki}\right) +$$
$$+ (-\xi a_3 + R(1 + B_1a_3 + B_3a_6))\sigma^S_{kl,kl}\delta_{ij} +$$
$$+ a_6\Delta\mu^S_{ij} + (a_5 + (\xi - RB_1)(2a_5 + a_6) - RB_3(2a_2 + a_4))\Delta\overset{\circ}{\mu}\delta_{ij} +$$
$$+ (-a_5 + (1 - 2QB_1)(2a_5 + a_6) - 2QB_3(2a_2 + a_4))\overset{\circ}{\mu}_{,ij} +$$
$$+ (-a_6 + Q(B_1a_6 + B_3a_4))\left(\mu^S_{ik,kj} + \mu^S_{jk,ki}\right) +$$
$$+ (-\xi a_6 + R(B_1a_6 + B_3a_4))\mu^S_{kl,kl}\delta_{ij} = 0; \qquad (1.41)$$

$$a_6\Delta\sigma^S_{ij} + (a_5 + (\xi' - R'B_2)(2a_5 + a_6) - R'B_3(2a_1 + a_3))\Delta\Theta\delta_{ij} +$$
$$+ (-a_5 + (1 - 2Q'B_2)(2a_5 + a_6) - 2Q'B_3(2a_1 + a_3))\Theta_{,ij} +$$
$$+ (-a_6 + Q'(B_3a_3 + B_2a_6))\left(\sigma^S_{ik,kj} + \sigma^S_{jk,ki}\right) +$$
$$+ (-\xi' a_6 + R'(B_3a_3 + B_2a_6))\sigma^S_{kl,kl}\delta_{ij} +$$
$$+ a_4\Delta\mu^S_{ij} + (a_2 + (\xi' - R'B_2)(2a_2 + a_4) - R'B_3(2a_5 + a_6))\Delta\overset{\circ}{\mu}\delta_{ij} +$$
$$+ (-a_2 + (1 - 2Q'B_2)(2a_2 + a_4) - 2Q'B_3(2a_5 + a_6))\overset{\circ}{\mu}_{,ij} +$$
$$+ (-a_4 + Q'(1 + B_3a_6 + B_2a_4))\left(\mu^S_{ik,kj} + \mu^S_{jk,ki}\right) +$$
$$+ (-\xi' a_4 + R'(1 + B_3a_6 + B_2a_4))\mu^S_{kl,kl}\delta_{ij} +$$
$$+ 2Q'(B_1a_3 + B_3a_6)\left(\varepsilon_{imn}\,\sigma^S_{jm,n} + \varepsilon_{jmn}\,\sigma^S_{im,n}\right) +$$
$$+ 2Q'(B_1a_6 + B_3a_4)\left(\varepsilon_{imn}\,\mu^S_{jm,n} + \varepsilon_{jmn}\mu^S_{im,n}\right) = 0. \qquad (1.42)$$

«Новая» постановка задачи заключается в отыскании 12 независимых компонент симметричных тензоров σ^S_{ij}, μ^S_{ij} из решения 12 обобщенных уравнений совместности (1.41), (1.42) при удовлетворении шести граничных условий (1.29), (1.30) и шести уравнений равновесия на границе тела (1.33), (1.34). Антисимметричные тензоры σ^A_{ij} и μ^A_{ij} в граничных условиях можно выразить через контурные интегралы:

$$\sigma_{ij}^{A}=B_1\int\limits_{M_0}^{M}\left[a_1\left(\Theta_{,j}\delta_{ki}+\Theta_{,i}\delta_{kj}\right)+a_3\left(\sigma_{ki,j}^{S}+\sigma_{kj,i}^{S}\right)+a_5\left(\overset{0}{\mu}_{,j}\delta_{ki}+\overset{0}{\mu}_{,i}\delta_{kj}\right)+\right.$$

$$\left.+a_6\left(\mu_{ki,j}^{S}+\mu_{kj,i}^{S}\right)\right]dy_k+B_1\omega_{ij}^{0}+B_3k_{ij}^{A(0)};\qquad(1.43)$$

$$\mu_{ij}^{A}=B_2\int\limits_{M_0}^{M}\left[a_2\left(\overset{0}{\mu}_{,j}\delta_{ki}+\overset{0}{\mu}_{,i}\delta_{kj}\right)+a_4\left(\mu_{ki,j}^{S}+\mu_{kj,i}^{S}\right)+a_5\left(\Theta_{,j}\delta_{ki}+\Theta_{,i}\delta_{kj}\right)+\right.$$

$$\left.+a_6\left(\sigma_{ki,j}^{S}+\sigma_{kj,i}^{S}\right)\right]dy_k+B_2k_{ij}^{A(0)}+B_3\omega_{ij}^{0},\qquad(1.44)$$

где M_0 – произвольная точка на $\sum$, в которой заданы величины ω_{ij}^{0} и $k_{ij}^{A(0)}$, а M – текущая точка с координатами x_k.

2. Эллиптичность системы обобщенных уравнений совместности

Пусть задана система уравнений с N неизвестными функциями $u_1,...,u_n$ с m независимыми переменными $x_1,...,x_m$.. Эту систему можно записать так

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|\le s_{jk}}A_{jk}^{(\alpha)}(\vec{x})D^{\alpha}u_k=f_j(\vec{x}).\qquad(2.1)$$

Здесь D^{α} – некоторые линейные дифференциальные выражения $\vec{D}=(D_1,...,D_m)$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_m)$ – мультииндекс, $\vec{x}=(x_1,...,x_m)$.

Если порядок дифференциального выражения равен s_{jk}, то можно записать

$$L_{jk}u_k=\sum_{|\alpha|\le s_{jk}}A_{jk}^{(\alpha)}(\vec{x})D^{\alpha}u_k,\qquad(2.2)$$

где

$$L_{jk}(\vec{x},\vec{D})=\sum_{|\alpha|\le s_{jk}}A_{jk}^{(\alpha)}(\vec{x})D^{\alpha}.\qquad(2.3)$$

Поэтому систему можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{N}L_{jk}(\vec{x},\vec{D})\,u_k=f_j(\vec{x}),\ \ j=1,...,N.\qquad(2.4)$$

Если ввести матрицу $L(\vec{x},\vec{D})=\left\|L_{jk}(\vec{x},\vec{D})\right\|$ порядка N и N-компонентные векторы $\vec{u}=(u_1,...,u_N)$ и $\vec{f}=(f_1,...,f_N)$, то система примет матричный вид

$$L(\vec{x},\vec{D})\vec{u}=\vec{f}(\vec{x}).\qquad(2.5)$$

Через $L_{jk}^{0}(\vec{x},\vec{D})$ обозначена главная часть полиномиальной матрицы $L(\vec{x},\vec{D})$. Она получается, если в формуле (2.3) удержать только члены, у которых $|\alpha|=s_{jk}$

$$L_{jk}^{0}(\vec{x},\vec{\xi})=\sum_{|\alpha|=s_{jk}}A_{jk}^{(\alpha)}\xi^{\alpha}.\qquad(2.6)$$

Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_N)$ – произвольная точка пространства $\Re^m$. Можно положить

$$L_{jk}^0(\vec{x}, \vec{\xi}) = \sum_{|\alpha| = s_{jk}} A_{jk}^{(\alpha)} \xi^\alpha. \tag{2.7}$$

При этом

$$L^0(\vec{x}, \vec{\xi}) = \det \left\| L_{jk}^0(\vec{x}, \vec{\xi}) \right\|. \tag{2.8}$$

Система называется правильно эллиптической, если порядок системы p – четное число (p = 2M), и для каждой пары линейно независимых действительных векторов $\vec{\xi}$ и $\vec{n}$ полином $L^0(\vec{x}, \vec{\xi} + \tau\vec{n})$ комплексной переменной τ имеет ровно M корней с положительной мнимой частью.

Систему обобщенных уравнений совместности (1.41), (1.42) можно рассматривать как линейную дифференциальную систему уравнений второго порядка относительно двенадцати независимых переменных. Главная часть полиномиальной матрицы $\left\| L_{ij}^0(\vec{x}, \vec{\xi}) \right\|$, $i = 1, ..., 12$, $j = 1, ..., 12$, будет иметь блочный вид

$$L^0 = \begin{pmatrix} L^{LU} & L^{RU} \\ L^{LL} & R^{RL} \end{pmatrix}.$$

Матрицы L^X (*X* заменяет любую из комбинаций *LU*, *LL*, *RU*, *RL*) имеют размерность 6×6 и записываются в единообразном виде

$$\left\| \begin{array}{c:c:c:c:c:c}
\begin{gathered}(c_1^X + c_2^X)\vec{r}^{\,2} + \\ +(c_3^X + 2c_4^X + c_5^X)x^2\end{gathered} & \begin{gathered}c_2^X \vec{r}^{\,2} + \\ + c_3^X x^2 + c_5^X y^2\end{gathered} & \begin{gathered}c_2^X \vec{r}^{\,2} + \\ + c_3^X x^2 + c_5^X z^2\end{gathered} & 2(c_4^X + c_5^X)xy & 2c_5^X yz & 2(c_4^X + c_5^X)xz \\ \hdashline
\begin{gathered}c_2^X \vec{r}^{\,2} + \\ + c_5^X x^2 + c_3^X y^2\end{gathered} & \begin{gathered}(c_1^X + c_2^X)\vec{r}^{\,2} + \\ +(c_3^X + 2c_4^X + c_5^X)y^2\end{gathered} & \begin{gathered}c_2^X \vec{r}^{\,2} + \\ + c_3^X y^2 + c_5^X z^2\end{gathered} & 2(c_4^X + c_5^X)xy & 2(c_4^X + c_5^X)yz & 2c_5^X xz \\ \hdashline
\begin{gathered}c_2^X \vec{r}^{\,2} + \\ + c_5^X x^2 + c_3^X y^2\end{gathered} & \begin{gathered}c_2^X \vec{r}^{\,2} + \\ + c_5^X y^2 + c_3^X z^2\end{gathered} & \begin{gathered}(c_1^X + c_2^X)\vec{r}^{\,2} + \\ +(c_3^X + 2c_4^X + c_5^X)z^2\end{gathered} & 2c_5^X xy & 2(c_4^X + c_5^X)yz & 2(c_4^X + c_5^X)xz \\ \hdashline
(c_3^X + c_4^X)xy & (c_3^X + c_4^X)xy & c_3^X xy & \begin{gathered}c_1^X \vec{r}^{\,2} + \\ + c_4^X(x^2 + y^2)\end{gathered} & c_4^X xz & c_4^X yz \\ \hdashline
c_3^X yz & (c_3^X + c_4^X)yz & (c_3^X + c_4^X)yz & c_4^X xz & \begin{gathered}c_1^X \vec{r}^{\,2} + \\ + c_4^x(y^2 + z^2)\end{gathered} & c_4^X xy \\ \hdashline
(c_3^X + c_4^X)xz & c_3^X xz & (c_3^X + c_4^X)xz & c_4^X yz & c_4^X xy & \begin{gathered}c_1^X \vec{r}^{\,2} + \\ + c_4^x(x^2 + z^2)\end{gathered}
\end{array} \right\|$$

Здесь $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и также введены следующие обозначения:

$$c_1^{LU} = a_3;$$

$$c_2^{LU} = a_1 + (\xi - RB_1)(2a_1 + a_3) - RB_3(2a_5 + a_6);$$

$$c_3^{LU} = -a_1 + (1 - 2QB_1)(2a_1 + a_3) - 2QB_3(2a_5 + a_6);$$

$$c_4^{LU} = -a_3 + Q\left(1 + B_1 a_3 + B_3 a_6\right);$$

$$c_5^{LU} = -\xi a_3 + R\left(1 + B_1 a_3 + B_3 a_6\right);$$

$$c_1^{RU} = a_6;$$

$$c_2^{RU} = a_5 - \left(2a_2 + a_4\right)B_3 R + \left(2a_5 + a_6\right)\left(-B_1 R + \xi\right);$$

$$c_3^{RU} = -a_5 + \left(1 - 2QB_1\right)\left(2a_5 + a_6\right) - 2QB_3\left(2a_2 + a_4\right);$$

$$c_4^{RU} = -a_6 + Q\left(B_1 a_6 + B_3 a_4\right);$$

$$c_5^{RU} = -\xi a_6 + R\left(B_1 a_6 + B_3 a_4\right);$$

$$c_1^{LL} = a_6;$$

$$c_2^{LL} = a_5 + \left(\xi' - R' B_2\right)\left(2a_5 + a_6\right) - R' B_3\left(2a_1 + a_3\right);$$

$$c_3^{LL} = -a_5 + \left(1 - 2Q' B_2\right)\left(2a_5 + a_6\right) - 2Q' B_3\left(2a_1 + a_3\right);$$

$$c_4^{LL} = -a_6 + Q'\left(B_3 a_3 + B_2 a_6\right);$$

$$c_5^{LL} = -\xi' a_6 + R'\left(B_3 a_3 + B_2 a_6\right);$$

$$c_1^{RL} = a_4;$$

$$c_2^{RL} = a_2 + \left(\xi' - R' B_2\right)\left(2a_2 + a_4\right) - R' B_3\left(2a_5 + a_6\right);$$

$$c_3^{RL} = -a_2 + \left(1 - 2Q' B_2\right)\left(2a_2 + a_4\right) - 2Q' B_3\left(2a_5 + a_6\right);$$

$$c_4^{RL} = -a_4 + Q'\left(1 + B_3 a_6 + B_2 a_4\right);$$

$$c_5^{RL} = -\xi' a_4 + R'\left(1 + B_3 a_6 + B_2 a_4\right).$$

Матрицы $L^X\left(\vec{x}, \vec{\xi} + \tau\vec{n}\right)$ для $\vec{\xi} = \left(1, 0, 0\right)$ и $\vec{n} = \left(0, 0, 1\right)$ запишутся в виде

$$\left\| \begin{array}{c:c:c:c:c:c}
\begin{array}{c}\left(c_1^X + {}_2^X\right)\left(1+\tau^2\right)+ \\ + c_3^X + 2c_4^X + c_5^X\end{array} & c_2^X\left(1+\tau^2\right) + c_3^X & \begin{array}{c}c_2^X\left(1+\tau^2\right)+ \\ + c_3^X + c_5^X\tau^2\end{array} & 0 & 0 & 2\left(c_4^X + c_5^X\right)\tau \\ \hdashline
c_2^X\left(1+\tau^2\right) + c_5^X & \left(c_1^X + {}_2^X\right)\left(1+\tau^2\right) & c_2^X\left(1+\tau^2\right) + c_5^X\tau^2 & 0 & 0 & 2c_5^X\tau \\ \hdashline
c_2^X\left(1+\tau^2\right) + c_5^X & \begin{array}{c}c_2^X\left(1+\tau^2\right)+ \\ + c_3^X\tau^2\end{array} & \begin{array}{c}\left(c_1^X + {}_2^X\right)\left(1+\tau^2\right)+ \\ + \left(c_3^X + 2c_4^X + c_5^X\right)\tau^2\end{array} & 0 & 0 & 2\left(c_4^X + c_5^X\right)\tau \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & \begin{array}{c}c_1^X\left(1+\tau^2\right)+ \\ + c_4^X\end{array} & c_4^X\tau & 0 \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & c_4^X\tau & \begin{array}{c}c_1^X\left(1+\tau^2\right)+ \\ + c_4^X\tau^2\end{array} & 0 \\ \hdashline
\left(c_3^X + c_4^X\right)\tau & c_3^X\tau & \left(c_3^X + c_4^X\right)\tau & 0 & 0 & \left(c_1^X + {}_4^X\right)\left(1+\tau^2\right)
\end{array} \right\|$$

Легко видеть, что в определителе матрицы $L^X\left(\vec{x}, \vec{\xi}+\tau\vec{n}\right)$ для $\vec{\xi}=(1,0,0)$ и $\vec{n}=(0,0,1)$ можно выделить угол нулей размером 8×4, что значительно облегчает нахождение определителя этой матрицы, приведенного ниже,

$$\Delta = \left(1+\tau^2\right)^{12}\left(-a_3a_4+a_6^2\right)\left((2a_1+a_3)(2a_2+a_4)-(2a_5+a_6)^2\right)\times$$
$$\times\left(1+a_4B_2+2a_6B_3+a_6^2\left(-B_1B_2+B_3^2\right)+a_3\left(B_1(1+a_4B_2)-a_4B_3^2\right)\right)^2\times$$
$$\times Q^2Q'^2\left(-R+Q(2+4\xi)\right)\left(-R'+Q'(2+4\xi')\right).$$

Таким образом, правильная эллиптичность достигается при следующем выборе параметров:

$$-a_3a_4+a_6^2\neq 0;$$

$$(2a_1+a_3)(2a_2+a_4)-(2a_5+a_6)^2\neq 0;$$

$$1+a_4B_2+2a_6B_3+a_6^2\left(-B_1B_2+B_3^2\right)+a_3\left(B_1(1+a_4B_2)-a_4B_3^2\right)\neq 0;$$

$$Q\neq 0;$$

$$Q'\neq 0;$$

$$-R+Q(2+4\xi)\neq 0;$$

$$-R'+Q'(2+4\xi')\neq 0.$$

Список литературы

1. Новацкий, В.К. Теория упругости / В.К. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
2. Победря, Б.Е. Статическая задача несимметричной теории упругости для изотропной среды / Б.Е. Победря // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2005. – № 1. – С. 54–59.
3. Победря, Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности : учеб. пособие / Б.Е. Победря. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1995. – 365 с.
4. Агмон, С. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы : пер. с англ. / С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг. – М. : Изд-во иностр. лит., 1962. – 205 с.
5. Лопатинский, Я.Б. Теория общих граничных задач / Я.Б. Лопатинский. – Киев : Наукова Думка, 1984. – 316 с.
6. Муравлева, Л.В. Применение вариационных методов при решении пространственной задачи теории упругости в напряжениях : дис. … д-ра техн. наук : 01.02.04 : защищена 13.03.87 : утв. 05.08.87 / Муравлева Лариса Викторовна. – Москва, 1987. – 141 с.
7. Хермандер, Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными : пер. с англ. / Л. Хермандер. – М. : Мир, 1965. – 379 с.
8. Nowacki, W. Teoria niesymetrycznej sprężystości / W. Nowacki. – Warsawa : PWN, 1971. – 246 p.

New Task Setting for Non-Symmetric Theory of Elasticity

B.E. Pobedrya, A.V. Leonov

Department "Composite Materials", Moscow State University named after M.V. Lomonosov; anton.v.leonov@gmail.com

Key words and phrases: compatibility equation; equilibrium equation; Kosser medium; non-symmetric theory of elasticity; system ellipticity.

Abstract: Studies the new setting of deformation task in Kosser medium. The conditions for the right ellipticity of the compatibility equations system are produced.

Neue Aufgabestellung der asymmetrischen Elastizitätstheorie

Zusammenfassung: Es ist die neue Aufgabestellung der Deformierung im Kosser-Medium untersucht. Es sind die Bedingungen der Elliptizität der Gleichungen der Kompatibilität erhalten.

La nouvelle mise de problème de la théorie non symmétrique de l'élasticité

Résumé: Est étudiée la nouvelle mise de problème de la déformation dans le milieu de Kosser. Sont obtenues les conditions de la corrècte ellipticité du système de la compatibilité des équations.

Авторы: ***Победря Борис Ефимович*** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Композитные материалы»; ***Леонов Антон Владимирович*** **–** аспирант кафедры «Композитные материалы», ГОУ ВПО «МГУ им. М.В. Ломоносова».

Рецензент: ***Куликов Геннадий Михайлович*** **–** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ».
