УДК 51-74:519.711:519.714:666.972.7:691.175

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДАМИ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

А.Н. Бормотов[1], И.А. Прошин[2]

Кафедры: «Теоретическая и прикладная механика» (1), «Автоматизация и управление» (2), ГОУ ВПО «Пензенская государственная технологическая академия»; aleks21618@yandex.ru

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: композиционные материалы; математическое моделирование; многокритериальный синтез; оптимизация структуры и свойств; структурообразование; управление качеством.

Аннотация: Представлено исследование комплексного влияния различных факторов на реологические свойства композитов с использованием методов теории управления и системного анализа. Установлена обобщенная зависимость изучаемого свойства от всего комплекса факторов, рассматривая композит как сложную техническую систему. На основе анализа экспериментальных данных проверена адекватность предложенных моделей.

К настоящему времени выполнены многие исследования, посвященные проблемам структурообразования радиационно-защитных композитов, синтеза их основных технических свойств и деструктивных процессов в различных условиях эксплуатации. В отдельный раздел можно выделить исследования, направленные на определение влияния различных рецептурно-технологических факторов на реологические свойства мастик, растворов и бетонов. Как правило, исследователи ограничиваются представлением экспериментальных данных и математических моделей влияния отдельных рецептурных факторов на предельное напряжение сдвига смеси. Однако среди них практически нет обобщающих работ, в которых рассматривались бы вопросы комплексного влияния различных факторов на реологические свойства композитов. Исключение составляют работы В.А. Вознесенского по моделированию реологических параметров смесей на основе минеральных связующих с помощью экспериментальных полиномиальных моделей, справедливых для некоторых частных случаев [1, 2].

Обобщенные модели влияния содержания дисперсной фазы на реологические свойства смесей представлены уравнениями Эйнштейна, Муни, Гута-Смолвуда и др. Эти модели достаточно точно позволяют прогнозировать влияние количества дисперсной фазы в узких диапазонах изменения степени наполнения композитов. При этом влияние размеров частиц дисперсной фазы, а следовательно, и связность смеси не учитываются.

Наиболее значительный вклад в теорию вязкого течения дисперсных систем был внесен работами Генри Эйринга и Г.М. Бартенева [3]. Разработанная ими молекулярно-кинетическая теория течения дисперсных систем основана на гипотезе о перемещении слоя частиц в направлении действия внешней силы и учитывает структурные изменения системы при ее разрушении. Она справедлива для систем, частицы которой способны к диффузионному перемещению в дисперсионной среде.

По мнению авторов [4], исследование комплексного влияния различных факторов на реологические свойства композитов целесообразно проводить с использованием *методов теории управления и системного анализа* – установление обобщенной зависимости изучаемого свойства от всего комплекса факторов, рассматривая *композит как сложную техническую систему*.

На практике это сводится к аппроксимации экспериментальных данных функцией многих переменных заданного вида и получение *обобщенной математической модели*.

В общем случае задача аппроксимации (приближения функций) формулируется для функции

$$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

векторного аргумента, заданного на некоторой области.

Самой простой и грубой является ступенчатая аппроксимация. Она применяется как при мелкой сетке в пространстве аргумента x (то есть по существу при табличном способе задания функции), так и при специальном виде самой функции.

Задача приближения функции нескольких переменных решается на основе метода наименьших квадратов, представляя ее суммой функций одной переменной.

Для функции двух переменных $f(x_1, x_2)$ с прямоугольной областью изменения аргументов:

$$d_{11} \le x_1 \le d_{12}, \quad d_{21} \le x_2 \le d_{22}$$

соответствующее выражение имеет вид

$$\min_{f_1 f_2} \int_{d_{21}}^{d_{22}} \int_{d_{11}}^{d_{12}} \left[f(x_1, x_2) - f_1(x_1) - f_2(x_2)\right]^2 dx_1 dx_2 .$$

Решение задачи получается в виде

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) = \bar{f}^{x_1} + \bar{f}^{x_2} - \bar{\bar{f}}^{x_1 x_2} ,$$

где

$$\bar{f}^{x_1} = \frac{1}{d_{12} - d_{11}} \int_{d_{11}}^{d_{12}} f(x_1, x_2)\, dx_1 ;$$

$$\bar{f}^{x_2} = \frac{1}{d_{22} - d_{21}} \int_{d_{21}}^{d_{22}} f(x_1, x_2)\, dx_2 ;$$

$$\bar{\bar{f}}^{x_1 x_2} = \frac{1}{(d_{12} - d_{11})(d_{22} - d_{21})} \int_{d_{21}}^{d_{22}} \int_{d_{11}}^{d_{12}} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 .$$

Задача приближения функции двух аргументов посредством произведения двух одномерных аргументов может быть сведена к только что рассмотренной. Действительно, если вместо исходной функции $f(x_1, x_2)$ рассмотреть функцию $\varphi(x_1, x_2) = \ln f(x_1, x_2)$, выполнить приближение этой функции суммой $\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$, а затем образовать функции

$$f_1(x_1) = \exp \varphi_1(x_1), \quad f_2(x_2) = \exp \varphi_2(x_2),$$

то

$$\ln f(x_1, x_2) \approx \ln f_1(x_1) + \ln f_2(x_2);$$

$$f(x_1, x_2) \approx f_1(x_1) f_2(x_2).$$

При переходе к многомерным процессам задача аппроксимации существенно усложняется. Известные в настоящее время методы многомерной аппроксимации менее эффективны, чем методы приближения одномерных функций. При этом трудоемкость вычислений с ростом размерности решаемых задач резко возрастает.

Приведем относительно простой способ приближения многомерных таблично заданных функций обобщенными многочленами частного вида. Ограничимся случаем двумерной аппроксимации. Пусть значения $W(x, y)$ заданы в табл. 1.

Определим аппроксимирующий многочлен в виде

$$Q_q = a_1 f_1(x)\varphi_1(y) + a_2 f_2(x)\varphi_2(y) + \ldots + a_q f_q(x)\varphi_q(y), \tag{1}$$

где $f_p(x)$, $\varphi_p(y)$, $p = \overline{1, q}$ – функции, выбранные из каких-то соображений; a_p – неизвестные коэффициенты.

Для определения коэффициентов a_p воспользуемся методом наименьших квадратов, то есть из условий минимума

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{p=1}^{q} a_p f_p(x_i)\varphi_p(y_i) - W_{ij}\right]^2,$$

приравнивая частные производные по a_p нулю, получим для определения неизвестных

$$a_1, a_2, \ldots, a_q$$

систему уравнений [5]

$$\begin{cases} c_{1,1}a_1 + c_{1,2}a_2 + \ldots + c_{1,q}a_q = b_1 \\ c_{2,1}a_1 + c_{2,2}a_2 + \ldots + c_{2,q}a_q = b_2 \\ \ldots \\ c_{q,1}a_1 + c_{q,2}a_2 + \ldots + c_{q,q}a_q = b_q, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$c_{\alpha,\beta} = f_{\alpha,\beta}\varphi_{\alpha,\beta}; \quad \alpha = \overline{1, q}; \quad \beta = \overline{1, q};$$

Таблица 1

Значения функции $W(x, y)$

$x \backslash y$	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m
x_1	W_{11}	W_{12}	...	W_{1j}	...	W_{1m}
x_2	W_{21}	W_{22}	...	W_{2j}	...	W_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	W_{i1}	W_{i2}	...	W_{ij}	...	W_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	W_{n1}	W_{n2}	...	W_{nj}	...	W_{nm}

$$f_{\alpha,\beta}=\sum_{i=1}^{n} f_\alpha(x_i) f_\beta(x_i);\quad \varphi_{\alpha,\beta}=\sum_{j=1}^{n}\varphi_\alpha(y_j)\varphi_\beta(y_j);$$

$$b_p=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} W_{ij} f_p(x_i)\varphi_p(y_j);\quad p=\overline{1,q};\quad c_{\alpha,\beta}=c_{\beta,q}.$$

В случае трехмерной аппроксимации для каждого $z=z_k$, $k=\overline{1,\ell}$, значения функции $W(x, y, z)$ задаются в виде прямоугольной таблицы $n\times m$ (табл. 2).

Аппроксимирующий многочлен представляется в виде

$$Q_q = a_1 f_1(x)\varphi_1(y)\psi_1(z) + a_2 f_2(x)\varphi_2(y)\psi_2(z) + \ldots + a_q f_q(x)\varphi_q(y)\psi_q(z), \tag{3}$$

где $f_p(x)$, $\varphi_p(y)$, $\psi_p(z)$, $p=\overline{1,q}$ – функции, выбранные из каких-то соображений; a_p – неизвестные коэффициенты.

Применим метод наименьших квадратов.

Вычисляя частные производные по a_p и приравнивая их нулю, получим систему уравнений (2), где:

$$c_{\alpha,\beta}=f_{\alpha,\beta}\varphi_{\alpha,\beta}\psi_{\alpha,\beta};$$

$$f_{\alpha,\beta}=\sum_{i=1}^{n} f_\alpha(x_i) f_\beta(x_i);$$

$$\varphi_{\alpha,\beta}=\sum_{j=1}^{m}\varphi_\alpha(y_j)\varphi_\beta(y_j);$$

$$\psi_{\alpha,\beta}=\sum_{k=1}^{\ell}\psi_\alpha(z_k)\psi_\beta(z_k);$$

$$b_p=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\ell} W_{ijk} f_p(x_i)\varphi_p(y_j)\psi_p(z_k);$$

$$\alpha=\overline{1,q};\quad \beta=\overline{1,q};\quad p=\overline{1,q}.$$

Таблица 2

Значения функции *W*(*x*, *y*, *z*) для *z* = *z*$_k$

x \ y	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
x_1	W_{11k}	W_{12k}	…	W_{1jk}	…	W_{1mk}
x_2	W_{21k}	W_{22k}	…	W_{2jk}	…	W_{2mk}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	W_{i1k}	W_{i2k}	…	W_{ijk}	…	W_{imk}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_n	W_{n1k}	W_{n2k}	…	W_{njk}	…	W_{nmk}

Описанный способ аппроксимации легко распространяется и на функции с большим числом переменных.

Аппроксимирующему многочлену можно придать более общий, в сравнении с выражением (3), вид, например

$$Q_q = \sum_{p=1}^{q} a_p f_p(x,y,z). \qquad (4)$$

Величины $c_{\alpha,\beta}$ и b_p системы (2) вычисляются по формулам:

$$c_{\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^{n} f_\alpha(x_i, y_i, z_i) f_\beta(x_i, y_i, z_i);$$

$$b_p = \sum_{i=1}^{n} W_i f_p(x_i, y_i, z_i),$$

где n – общее число точек, пронумерованных произвольным образом, причем $n \geq q$. В данном случае отпадает необходимость иметь прямоугольную таблицу значений аппроксимируемой функции.

Более общее, в сравнении с уравнением (4), выражение для аппроксимирующего многочлена может быть представлено в виде

$$Q_q = \sum_{p=1}^{q} f_p(x, y, z, a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

где m – число подлежащих определению параметров аппроксимации.

Определение параметров a_1, a_2, ..., a_m в общем случае можно осуществить поиском минимума

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{p=1}^{q} f_p(x_i, y_i, z_i, a_1, a_2, \ldots, a_m) - W_i \right]^2$$

известными методами оптимизации.

При решении практических задач, как уже отмечалось, выбор вида аппроксимирующей функции во многом определяется интуицией экспериментатора. Однако есть и объективные критерии выбора вида аппроксимирующей функции.

Рассмотрим реологические свойства эпоксидных композитов специального назначения на примере определения аналитической зависимости предельного напряжения сдвига τ от объемной степени наполнения υ_f и времени t по данным эксперимента, приводимым в табл. 3 и на рис. 1 и 2. Очевидно, что указанные факторы наиболее полно характеризуют интенсивность изменения структуры формирующегося композита, то есть степень «загустевания» материала.

Таблица 3

Экспериментальная зависимость объемной степени наполнения от времени

υ_f \ t	5	10	15	20	25	30	35
0,19	40	50	170	1200	–	–	–
0,54	90	100	130	200	600	1200	–
0,70	120	130	150	180	250	480	1150
0,78	140	160	220	290	400	640	1300
0,82	140	170	250	330	440	700	1380

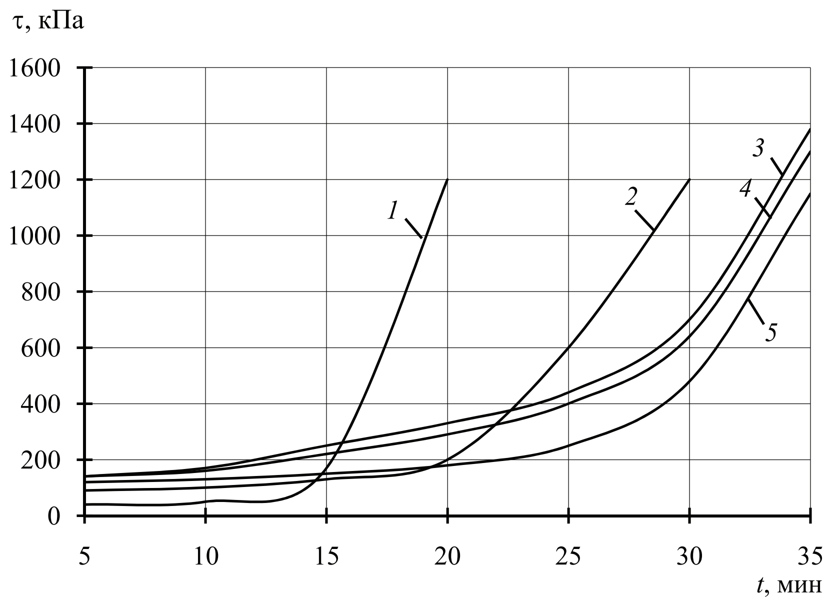


Рис. 1. Зависимость предельного напряжения сдвига от времени при различных значениях υ_f:
1 – 0,2; *2* – 0,55; *3* – 0,83; *4* – 0,78; *5* – 0,7

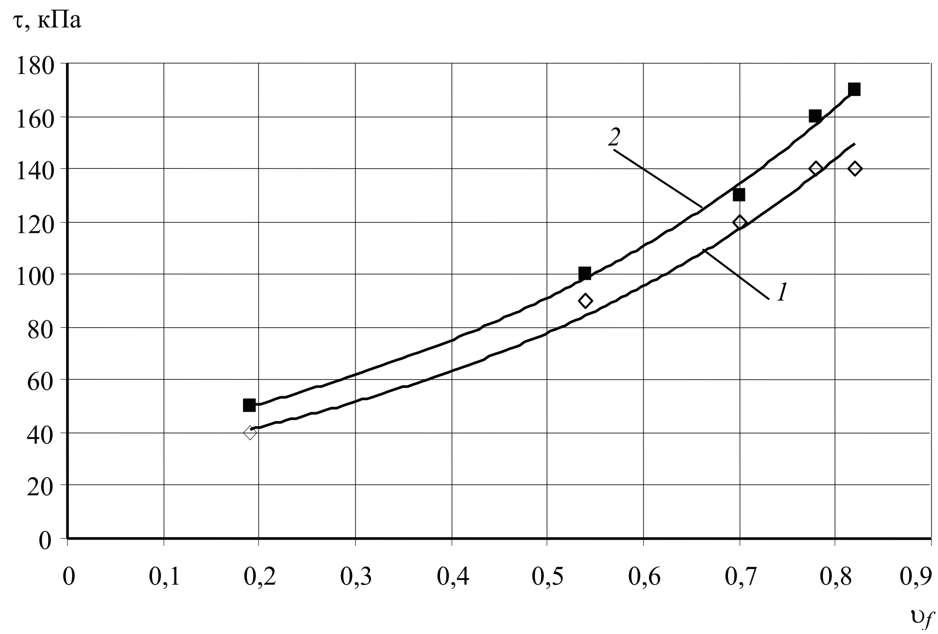
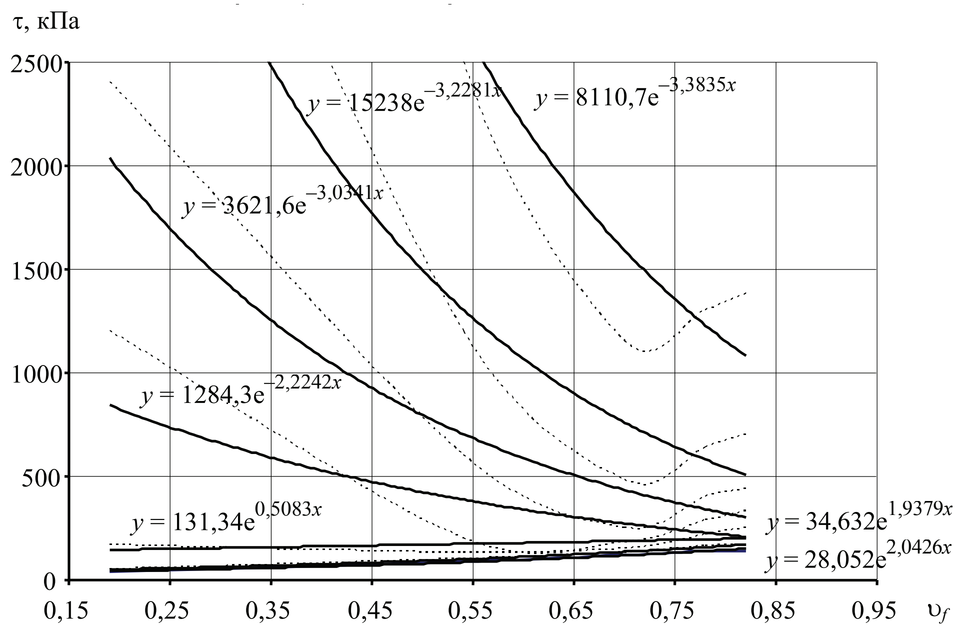


Рис. 2. Зависимость предельного напряжения сдвига от объемной степени наполнения:
1 – через 5 мин; *2* – через 10 мин

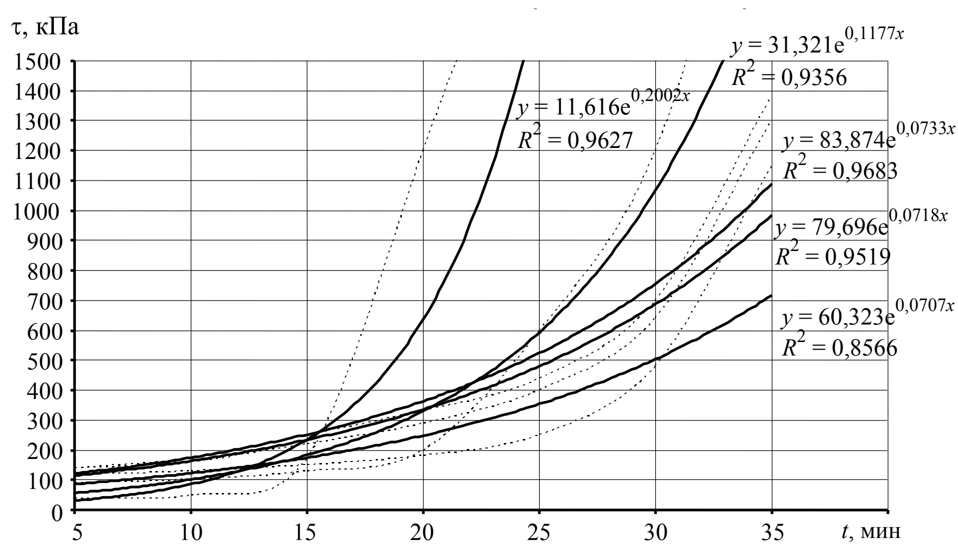
Для определения вида аппроксимирующей функции $\tau = \tau\,(\upsilon_f,\ t)$ воспользуемся методом сечений.

На рис. 3, *а* приводятся результаты аппроксимации функций $\tau = \tau\,(\upsilon_f,\ t = \text{const})$ функциями вида $y = a_1 e^{k_1 t}$, а на рис. 3, *б* – аппроксимация $\tau = \tau\,(\upsilon_f = \text{const},\ t)$ функциями вида $y = a_2 e^{k_2 t}$.

На рис. 4 показана полиноминальная аппроксимация $k_1 = k_1(\upsilon_f)$ и $k_2 = k_2(t)$ при различных степенях полинома.

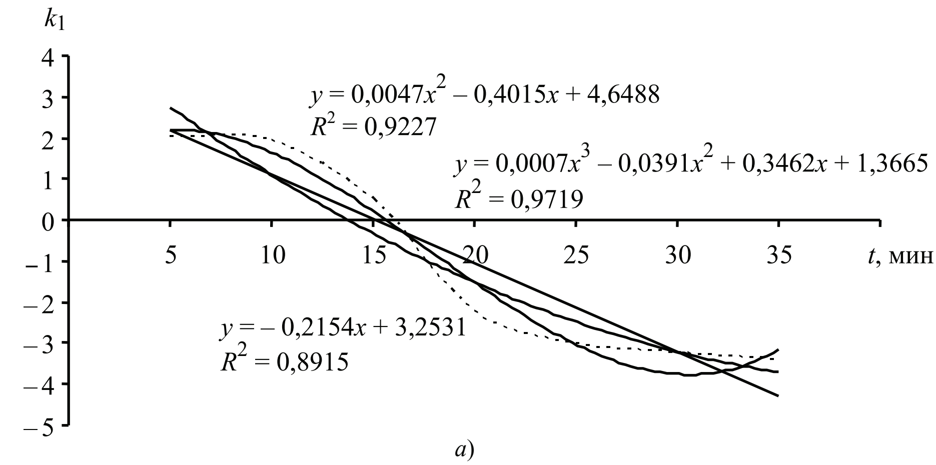


а)

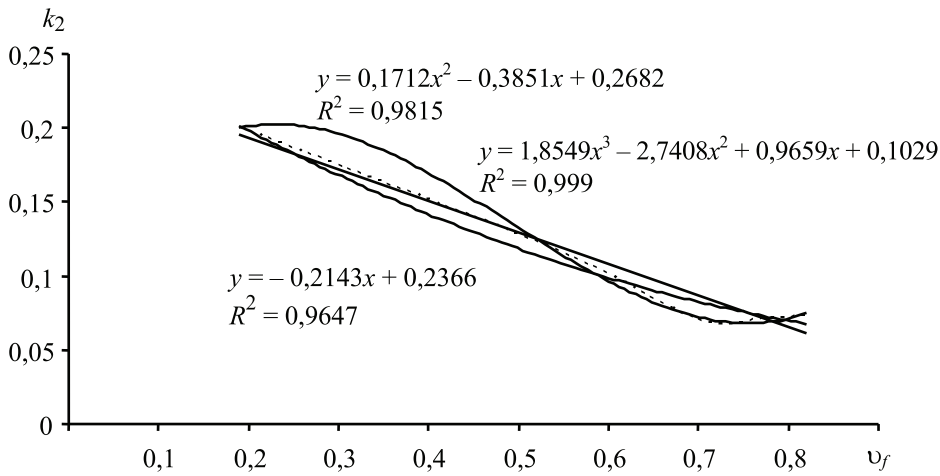


б)

Рис. 3. Аппроксимации функций:
а – $\tau = \tau\,(\upsilon_f,\ t = \text{const})$; *б* – $\tau = \tau\,(\upsilon_f = \text{const},\ t)$



а)



б)

Рис. 4. Полиномиальная аппроксимация $k_1 = k_1(\upsilon_f)$ (*а*) и $k_2 = k_2(t)$ (*б*) при различных степенях полинома

Из приведенных результатов с очевидностью следует возможность аппроксимации $\tau = \tau(\upsilon_f, t)$ в виде

$$\tau = A\exp\left[k_1(\upsilon_f)(\upsilon_f - 0{,}19) + k_2(t)(t-5)\right]$$

$$\text{при } 0{,}19 \le \upsilon_f \le 0{,}82;\ \ 5 \le t \le 35 \text{ мин},$$

где $A = \sum_{i=1}^{n} a_1 \sum_{j=1}^{m} a_2$.

При $n = 7$, $m = 5$ аппроксимация $\tau = \tau(\upsilon_f, t)$ получается в виде

$$\tau = 216884{,}94\exp\left[(-0{,}21\upsilon_f + 0{,}24)(\upsilon_f - 0{,}19) + (-0{,}22t + 3{,}25)(t-5)\right]$$

(рис. 5).

С применением полной диаграммы реологических свойств композиционных материалов можно проводить обоснованный выбор рецептурно-технологических параметров с учетом комплексного влияния указанных факторов на процессы структурообразования композиционных материалов.

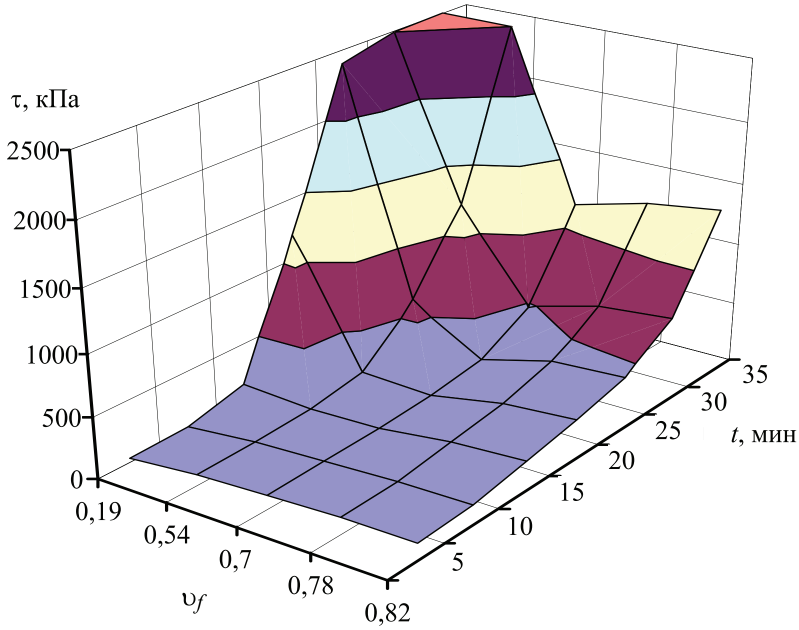


Рис. 5. Полная диаграмма реологических свойств радиационно-защитных эпоксидных композитов

Предложенный метод представления изменения реологических свойств (полная диаграмма) позволяет решить задачу оптимального синтеза композиционных материалов в случае действия множества структурообразующих факторов, то есть задачу *многокритериального синтеза*.

Работа выполнена при поддержке гранта АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» на 2009 год на тему «Математическое моделирование и многокритериальный синтез строительных материалов специального назначения», рег. № 2.1.2/5688.

Список литературы

1. Вознесенский, В.А. Численные методы решения строительно-технологических задач на ЭВМ / В.А. Вознесенский, Т.В. Ляшенко, Б.Л. Огарков. – Киев : Выща школа, 1989. – 326 с.

2. Баженов, Ю.М. Перспективы применения математических методов в технологии сборного железобетона / Ю.М. Баженов, В.А. Вознесенский. – М. : Стройиздат, 1974. – 191 с.

3. Бартенев, Г.М. Физика полимеров / Г.М. Бартенев, С.Я Френкель. – Л. : Химия, 1990. – 429 с.

4. Разработка и управление качеством строительных материалов с регулируемыми структурой и свойствами для защиты от радиации / А.П. Прошин [и др.] // Труды II Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'03, Москва, 29–31 янв. 2003 г. / Ин-т проблем упр. им. В.А. Трапезникова РАН. – М., 2003. – С. 2437–2460.

5. Супрун, А.Н. Вычислительная математика для инженеров-экологов / А.Н. Супрун, В.В. Найденко. – М. : АСВ, 1996. – 391 с.

Research into Rheological Properties of Composite Materials via System Analysis Techniques

A.N. Bormotov[1], I.A. Proshin[2]

Departments "Theoretical and Applied Mechanics" (1), "Automation and Mangement" (2), Penza State Technological Academy; aleks21618@yandex.ru

Key words and phrases: composite materials; mathematical modeling; multi-criteria synthesis; optimization of structure and properties; quality control; structuring.

Abstract: The paper presents the research into complex influence of different factors on rheological properties of composites using the techniques of management theory and system analysis. The generalized dependence of the examined feature on the whole set of factors is established; thus the composite is considered as complex technical system. On the basis of the experimental data the adequacy of the proposed models is proposed.

Untersuchung der rheologischen Eigenschaften der Materialkomposites durch die Methoden der Systemanalyse

Zusammenfassung: Es ist die Untersuchung der Komplexeinwirkung der verschiedenen Faktoren auf die rheologischen Eigenschaften der Kompositen mit der Benutzung der Methoden der Steuerungstheorie und der Systemanalyse dargelegt. Betrachtend das Koposit als kompliziertes technisches System ist die zusammengefasste Abhängigkeit der erlernenden Eigenschaft vom gesamten Komplex der Faktoren festgestellt. Auf Grund der Analyse der Experimentalangaben wird die Adäquatheit der vorgeschlagenen Modelle nachgeprüft.

Etudes des propriétés rhéologiques des matériaux composites par les méthodes de l'analyse systémique

Résumé: Est présentée l'étude de l'influence complexe de différents facteurs sur les propriétés rhéologiques des composites avec l'utilisation les méthodes de la théorie de la commande et de l'analyse systémique. Est établie une dépendance générale de la propriété étudiée de l'ensemble du complexe en examinant le composite comme une système technique complexe. A la base de l'étude des données expérimentales est contrôlée l'adéquation des modèles proposés.

Авторы: ***Бормотов Алексей Николаевич*** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика»; ***Прошин Иван Александрович*** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Автоматизация и управление», ГОУ ВПО «ПГТА».

Рецензент: ***Мачнев Валентин Андреевич*** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика и математика», ФГОУ ВПО «Пензенская государственная сельскохозяйственная академия».