УДК 681.5.09

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ. I. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

В.И. Левин

ГОУ ВПО «Пензенская государственная технологическая академия»; levin@pgta.ac.ru

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: двузначная логика; законы логики; модель надежности; непрерывная логика.

Аннотация: Описаны дискретная двузначная и непрерывная логики, служащие математическим аппаратом для моделирования соответственно статики и динамики надежности.

Введение

При проектировании технических систем их рассчитывают на надежность. Имеется обширная литература, указывающая как рассчитать нужную вероятностную характеристику (показатель) надежности системы по аналогичным характеристикам ее элементов. В качестве характеристик надежности выбирают среднее время $T_{\text{ср}}$ безотказной работы или вероятность $P(t)$ безотказной работы за время t. Однако вероятностные характеристики – не первичные величины, а результат их усреднения. Поэтому вероятностный расчет надежности системы по природе не элементарен и для сколько-нибудь сложных систем сопряжен с большими трудностями. Далее, вероятностные характеристики надежности элементов не всегда определимы из-за большой трудоемкости необходимых статистических испытаний. Наконец, разработка новых систем может требовать рассмотрения все новых вероятностных характеристик надежности. В этих условиях целесообразно построение такой теории и методов расчета надежности систем, где оперируют первичными (не выводимыми из других) величинами, относящимися к надежности системы и ее элементов, и устанавливают связь между ними. Действительно, при таком подходе расчет надежности систем становится элементарным, что должно расширить класс рассчитываемых систем. Далее, отпадает необходимость в специальном изучении конкретных характеристик надежности систем, так как их всегда можно выразить через указанные первичные величины. Наконец, естественно ожидать, что опытное определение первичных характеристик надежности элементов проще, чем вероятностных.

В предлагаемой теории первичными считаются последовательные моменты t_i отказов и восстановлений блоков (элементов) и аналогичные моменты T_k для системы в целом, а задача состоит в отыскании зависимостей $T_k = f_k(t_i)$ между ними. Эта теория обладает всеми указанными выше достоинствами. В то же время:

1) набор функций $\{f_k\}$ является наиболее полной качественной информацией о влиянии надежностей блоков на надежность системы, так как по нему можно количественно предсказать надежностное поведение системы при любых значениях надежности ее блоков (в частности, вычислить те или иные характеристики надежности системы);

2) можно даже в отсутствие числовых данных о надежности блоков сравнивать надежность систем: равнонадежным системам соответствуют эквивалентные наборы $\{f_k\}$, более надежной системе соответствует увеличение значений функций f_k, выражающих моменты отказов, и уменьшение значений функций f_k, выражающих моменты восстановлений;

3) можно изучать не только обычные модели, в которых надежностное состояние системы в любой момент времени полностью определяется надежностными состояниями блоков в тот же момент, но и модели с запоминанием предыдущих состояний;

4) зная набор функций $\{f_k\}$ системы, можно, наблюдая состояния ее блоков, прогнозировать индивидуальное надежностное поведение системы и на основе этого организовать ее рациональное техническое обслуживание.

В качестве модели надежности системы в работе был выбран динамический автомат, на входы которого подаются надежностные процессы в блоках (импульс процесса определяет интервал работоспособности блока, пауза – интервал неработоспособности), а с выхода снимается аналогичный процесс для системы. При этом оказалось, что функции влияния f_k всегда выражаются суперпозицией операций непрерывной логики (**НЛ**), и это позволяет говорить о логической теории надежности. Эта теория, помимо ее важного самостоятельного значения (см. выше), полезна и для традиционной вероятностной теории надежности, ибо, устанавливая логическую связь между первичными надежностными характеристиками системы и ее блоков, она облегчает расчет (моделирование на ЭВМ) вероятностных характеристик надежности сложных систем, сводя его к известной задаче – отысканию (моделированию) распределения детерминированных функций $f_k(t_i)$ от случайных аргументов t_i.

Автоматная модель и логические методы излагаемой теории облегчают ее изучение студентами, а также ее усвоение инженерами.

1.1. Двузначная дискретная логика

Рассмотрим множество из двух элементов $\{0,1\}$. Введем над ним следующие логические операции:

конъюнкцию

$$y \equiv x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 = x_2 = 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{1.1}$$

дизъюнкцию

$$y \equiv x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = x_2 = 0; \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{1.2}$$

отрицание

$$y \equiv \bar{x} = 1 - x = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Назовем *булевой функцией* произвольную функцию, которая, как и ее аргументы, принимает значения из множества $\{0,1\}$. Ясно, что двухместные функции –

конъюнкция (1.1) и дизъюнкция (1.2) и одноместная функция – отрицание (1.3) являются некоторыми простейшими булевыми функциями. Более сложными являются n-местные булевы функции:

конъюнкции

$$y \equiv x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 = \ldots = x_n = 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad (1.4)$$

дизъюнкции

$$y \equiv x_1 \vee \ldots \vee x_n = \bigvee_{i=1}^{n} x_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = \ldots = x_n = 0; \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (1.5)$$

В выражениях (1.1), (1.4) знак $\wedge$ обычно опускается, если нет опасности спутать конъюнкцию с другими операциями. Функции (1.1) и (1.2) являются частными случаями функций (1.4) и (1.5) при $n = 2$. Еще более сложными булевыми функциями являются:

элементарная n-местная конъюнкция

$$y \equiv \tilde{x}_1 \wedge \tilde{x}_2 \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_n \quad (\text{иначе } \tilde{x}_1\tilde{x}_2 \cdots \tilde{x}_n); \qquad (1.6)$$

элементарная n-местная дизъюнкция

$$y \equiv \tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \ldots \vee \tilde{x}_n, \qquad (1.7)$$

где $\tilde{x}_i$ есть x_i либо $\bar{x}_i$. Например: $y = x_1 x_2 \bar{x}_3$, $y = x_1 \vee \bar{x}_2$.

Наиболее сложными булевыми функциями являются дизъюнкция различных элементарных конъюнкций – *дизъюнктивная нормальная форма* (**ДНФ**) и конъюнкция различных элементарных дизъюнкций – *конъюнктивная нормальная форма* (**КНФ**). Булевы функции (1.1) – (1.7) – частные случаи как ДНФ, так и КНФ. Произвольная булева функция также может быть представлена и в ДНФ, и в КНФ.

Первичное задание булевой функции $y = f(x_1,...,x_n)$ обычно состоит в перечислении тех наборов аргументов $(x_1,...,x_n)$, на которых $y = 1$ (*единичные наборы*), либо тех наборов, на которых $y = 0$ (*нулевые наборы*). От задания перечислением единичных наборов можно перейти к заданию перечислением нулевых наборов и обратно, так как нулевые наборы – это все наборы, не являющиеся единичными, а единичные – это все наборы, не являющиеся нулевыми.

Для представления функции f в ДНФ удобно исходить из ее задания перечислением единичных наборов. При этом f записывается в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций, каждая из них обращается в 1 на каком-то одном наборе.

Пример 1.1. Функция $y = f(x_1, x_2)$ равна 1 на наборах 01 и 10. Запишем ее в ДНФ. Видим, что на наборе 01 обращается в единицу элементарная конъюнкция $\bar{x}_1 x_2$, а на наборе 10 – конъюнкция $x_1 \bar{x}_2$. Поэтому получаем $y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$.

Для представления функции f в КНФ удобно исходить из ее задания перечислением нулевых наборов. При этом f записывается в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций, каждая из которых обращается в нуль на каком-то одном наборе.

Пример 1.2. Функция $y = f(x_1, x_2, x_3)$ равна 0 на наборах 000 и 111. Так как на наборе 000 обращается в нуль элементарная дизъюнкция $x_1 \vee x_2 \vee x_3$, а на наборе 111 – дизъюнкция $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$, имеем $y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

От представления булевой функции в ДНФ легко перейти к ее представлению в КНФ и обратно. В первом случае совершается переход: ДНФ функции $\rightarrow$ представление функции перечислением единичных наборов $\to$ представление функции перечислением нулевых наборов $\to$ КНФ функции; во втором случае – обратный переход.

Пример 1.3. Задана ДНФ функции из примера 1.1: $y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$. Найти эквивалентное представление функции в виде КНФ. Из ДНФ функции видно, что единичные наборы 01 и 10. Значит, нулевые наборы – 00 и 11, откуда КНФ функции $y = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$.

Логические операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания подчиняются следующим законам:

тавтологии

$$x \vee x = x, \quad xx = x ; \tag{1.8}$$

переместительному

$$x \vee y = y \vee x, \quad xy = yx ; \tag{1.9}$$

сочетательному

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z, \quad (xy)z = x(yz) = xyz ; \tag{1.10}$$

распределительному

$$x(y \vee z) = xy \vee xz, \quad x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z) ; \tag{1.11}$$

отрицания (де Моргана)

$$\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y}, \quad \overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y} ; \tag{1.12}$$

поглощения

$$x \vee xy = x, \quad x(x \vee y) = x ; \tag{1.13}$$

двойного отрицания

$$\bar{\bar{x}} = x ; \tag{1.14}$$

склеивания

$$x \vee \bar{x} = 1, \quad x\bar{x} = 0 ; \tag{1.15}$$

ортогонализации

$$x \vee \bar{x}y = x \vee y . \tag{1.16}$$

При помощи законов (1.8) – (1.16) осуществляется эквивалентное преобразование логических выражений, задающих булевы функции, с целью упрощения этих выражений. Множество всех булевых функций, совместно с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, подчиняющимися законам (1.8) – (1.16), называется *булевой алгеброй.*

Пример 1.4. Привести к минимальному виду выражение $y = x_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 \vee$ $\vee x_2 x_3 x_5 \vee x_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_5$.

Объединим первую конъюнкцию с четвертой, а третью – с пятой. Вынося за скобки в каждой из пар конъюнкций общую букву и учитывая закон (1.15), получаем $y = x_1 x_4 \vee x_2 x_5 \vee x_2 x_3 x_4$. Дальнейшее упрощение полученного выражения в классе ДНФ невозможно, однако, оно станет возможным, если допустить другие формы выражения y. Например, объединяя в последнем выражении первую конъюнкцию с третьей и вынося в них за скобки x_4, получаем $y = (x_1 \vee x_2 x_3) x_4 \vee x_2 x_5$. Аналогичный результат получается при объединении второй конъюнкции с третьей.

Используя эквивалентные преобразования, можно любое логическое выражение преобразовать в ДНФ или КНФ.

1.2. Непрерывная логика

Рассмотрим бесконечное непрерывное множество точек $C = [A, B]$ – отрезок прямой $\overline{A, B}$. Введем над C логические операции:

конъюнкцию

$$y \equiv x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2); \tag{1.17}$$

дизъюнкцию

$$y \equiv x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2); \tag{1.18}$$

отрицание

$$y \equiv \bar{x} = A + B - x\,. \tag{1.19}$$

Операции (1.17) – (1.19) обобщают операции (1.1) – (1.3) и переходят в них в частном случае, когда множество $C = \{0,1\}$.

Назовем произвольную функцию, которая, как и ее аргументы, принимает значения из множества C и представима в виде суперпозиции логических операций (1.17) – (1.19) функций НЛ. Двухместные функции – конъюнкция (1.17) и дизъюнкция (1.18) и одноместная функция – отрицание (1.19) – простейшие функции НЛ. Более сложные функции:

n-местная конъюнкция

$$y \equiv x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = \min(x_1, ..., x_n); \tag{1.20}$$

n-местная дизъюнкция

$$y \equiv x_1 \vee \ldots \vee x_n = \bigvee_{i=1}^{n} x_i = \max(x_1, ..., x_n). \tag{1.21}$$

Еще более сложны элементарная n-местная конъюнкция

$$y \equiv x_1 \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_2 \ldots x_n \bar{x}_n \tag{1.22}$$

и элементарная n-местная дизъюнкция

$$y \equiv x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee x_n \vee \bar{x}_n\,. \tag{1.23}$$

В выражениях (1.22), (1.23) некоторые буквы с отрицаниями могут отсутствовать. Например, $y = x_1 x_2 \bar{x}_2$ или $y \equiv x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2$. Как видим, в отличие от двузначной логики в НЛ элементарные конъюнкции и дизъюнкции могут вместе с буквой x_i содержать и ее отрицание $\bar{x}_i$.

Наиболее сложные функции НЛ – ДНФ, то есть дизъюнкция различных элементарных конъюнкций, и КНФ, то есть конъюнкция различных элементарных дизъюнкций. Эти функции включают в себя как частные случаи введенные выше функции (1.17) – (1.23).

Всякая функция НЛ $y = f(x_1, ..., x_n)$ на любом наборе аргументов $(x_1, ..., x_n)$ принимает значение одного из аргументов x_i или его отрицания $\bar{x}_i$. Это следует из того, что элементарные логические операции (1.17) – (1.19), суперпозицией которых представлено выражение $y = f(x_1, ..., x_n)$, всегда имеют своим результатом одну из переменных, участвующих в операции, или ее отрицание.

Первичное задание функции НЛ $y = f(x_1, ..., x_n)$ может состоять в перечислении всех вариантов упорядочения аргументов $x_1, ..., x_n$ с указанием для каждого варианта того аргумента x_i или его отрицания $\bar{x}_i$, чье значение принимает функция. От первичного задания функции НЛ легко перейти к ее аналитическому представлению с помощью суперпозиции логических операций (1.17) – (1.19). Методику перехода поясним на примере.

Пример 1.5. Функция НЛ от трех переменных задана табл. 1. Найти аналитическое представление функции.

Согласно табл. 1

$$y = \begin{cases} x_1 & \text{при } x_1 \le x_2 \text{ и } x_3 \le x_1; \\ x_2 & \text{при } x_2 \le x_1 \text{ и } x_3 \le x_2; \\ x_3 & \text{при } x_3 \ge x_1 x_2. \end{cases}$$

Используем конъюнкцию НЛ и объединим первые две строки в одну

$$y = \begin{cases} x_1 x_2 & \text{при } x_3 \le x_1 x_2; \\ x_3 & \text{при } x_3 \ge x_1 x_2. \end{cases}$$

Объединяя теперь обе строки в одну с помощью операции дизъюнкции НЛ, находим искомое представление: $y = x_1 x_2 \vee x_3$.

Операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания НЛ подчиняются большинству законов, которым подчиняются аналогичные операции двузначной логики, а именно (1.8) – (1.14).

Однако законы склеивания и ортогонализации НЛ оказываются более сложными, чем их аналоги в двузначной логике:

$$x \vee \bar{x} = M + |x - M|; \quad x\bar{x} = M - |x - M|; \tag{1.24}$$

$$x \vee \bar{x}y = (x \vee y)(M + |x - M|), \tag{1.25}$$

где $M = (A + B)/2$.

При помощи перечисленных законов выражения функций НЛ могут подвергаться эквивалентным преобразованиям в целях их упрощения. Множество всех функций НЛ, рассматриваемых совместно с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания НЛ, подчиняющимися законам (1.8) – (1.14), (1.24), (1.25), называется *алгеброй НЛ.*

Произвольная функция НЛ может быть представлена в любой из двух стандартных форм – ДНФ и КНФ. Для такого представления удобно исходить из задания функции в аналитической форме. Переход от такой формы к ДНФ состоит в последовательном выполнении двух чередующихся операций: 1) спуск отрицаний с более сложных выражений на их менее сложные части в соответствии с законами отрицания (1.12), (1.14); 2) раскрытие скобок в соответствии с первым распределительным законом (1.11).

Таблица 1

Упорядочение аргументов	Значение функции	Упорядочение аргументов	Значение функции
$x_1 \le x_2 \le x_3$	x_3	$x_2 \le x_3 \le x_1$	x_3
$x_1 \le x_3 \le x_2$	x_3	$x_3 \le x_1 \le x_2$	x_1
$x_2 \le x_1 \le x_3$	x_3	$x_3 \le x_2 \le x_1$	x_2

Пример 1.6. Привести к ДНФ функцию НЛ $y=(x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3)\overline{\bar{x}_1x_4}$. Так, согласно (1.12), (1.14), $\overline{\bar{x}_1x_4} = x_1 \vee \bar{x}_4$. Подставив это в выражение y и раскрыв скобки по (1.11), после упрощения мы получим $y=(x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)=\underline{x_1x_2} \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee$ $\vee \underline{x_1x_2\bar{x}_4} \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4$.

Переход от произвольной аналитической формы записи функций НЛ к КНФ состоит в последовательном выполнении двух чередующихся операций: 1) спуск отрицаний с более сложных выражений на их менее сложные части согласно законам отрицания (1.12) (1.14); 2) введение скобок согласно второму распределительному закону (1.11).

Пример 1.7. Привести к КНФ функцию НЛ из примера 1.6. Имеем согласно второму закону (1.11) $x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3 = (x_1x_2 \vee \bar{x}_2)(x_1x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)\times$ $\times(x_2 \vee x_3)$. Учитывая найденное в примере 1.6 выражение $\overline{\bar{x}_1x_4}$, получаем $y = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)$.

1.3. Уравнения и неравенства НЛ

Уравнением НЛ называется уравнение вида

$$f(a_1, ..., a_k, x_1, ..., x_n) = \varphi(a_1, ..., a_k, x_1, ..., x_n), \tag{1.26}$$

где f и φ – заданные функции НЛ; $a_1, ..., a_k$ – известные, а $x_1, ..., x_n$ – неизвестные (искомые) аргументы. Любой набор $(x_1, ..., x_n)$, для которого равенство (1.26) обращается в тождество, называется *частным решением* уравнения (1.26). Совокупность всех частных решений называется *общим решением.*

Аналогично уравнению вводится *неравенство НЛ*

$$f(a_1, ..., a_k, x_1, ..., x_n) < \varphi(a_1, ..., a_k, x_1, ..., x_n). \tag{1.27}$$

Можно также рассматривать системы уравнений и неравенств НЛ. Основным методом решения уравнений и неравенств НЛ является последовательное *расчленение* левых и правых частей, основанное на определении операций НЛ и позволяющее заменять исходное уравнение (неравенство) эквивалентным объединением систем из более простых уравнений и неравенств. Решение системы уравнений и неравенств получается как пересечение решений входящих в нее уравнений (неравенств). Поясним сказанное.

Пусть обе части уравнения (1.26) представлены в ДНФ. Тогда в обеих частях последней операцией может быть только конъюнкция и дизъюнкция. Пусть, например, в левой части последняя операция – дизъюнкция. Тогда уравнение можно записать в виде

$$f_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \vee f_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}), \tag{1.28}$$

где $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – вектор параметров; $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ – вектор неизвестных. Согласно определению дизъюнкции НЛ уравнение (1.28) эквивалентно объединению двух систем уравнений и неравенств:

$$\left(\begin{matrix} f_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \ge f_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \\ f_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \end{matrix}\right\}\right) \cup \left(\begin{matrix} f_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < f_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \end{matrix}\right\}\right). \tag{1.29}$$

Расчленение левой части исходного уравнения (1.28) привело к тому, что каждое уравнение или неравенство в (1.29) стало проще, чем уравнение (1.28) (содержит меньше операций). Этот процесс упрощения теперь может быть продолжен путем расчленения правой части (1.28) и т.д.

Пример 1.8. Решить уравнение $ax = b$. Это уравнение путем расчленения левой части превращаем в объединение систем $(x \geq a = b) \cup (x = b < a)$. Отсюда решение: $x = b$ при $a > b$ и $x \geq b$ при $a = b$ (решение существует только при $a \geq b$).

Пример 1.9. Решить неравенство $ax > b$. Расчленение левой части дает объединение систем $(x \geq a > b) \cup (b < x < a)$. Отсюда решение: $x > b$ (существует при $a > b$).

Пример 1.10. Решить неравенство $ax < b$. Расчленением левой части получаем $(x \geq a < b) \cup (x < a, b)$. Решение: $x \in [A, B]$ при $a < b$ и $x < b$ при $a \geq b$ (существует всегда).

Пример 1.11. Решить уравнение $c \vee x = b$. Расчленение левой части дает объединение систем $(b = x > c) \cup (b = c \geq x)$. Решение: $x = b$ при $b > c$ и $x \leq b$ при $b = c$ (существует при $b \geq c$).

1.4. Вероятностные расчеты в непрерывной логике

На практике может возникнуть необходимость изучения функций НЛ, аргументы которых – случайные величины. Направление, занимающееся этим изучением, называется *вероятностной НЛ.* Задача вероятностной НЛ – отыскание распределений и моментов функций НЛ, аргументы которых распределены по известным законам.

1. Пусть, например, функция НЛ имеет вид конъюнкции

$$y = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i, \tag{1.30}$$

а ее аргументы x_i – независимые случайные величины с функциями распределения $F_{x_i}(x) = P(x_i < x)$, где P – символ вероятности, и плотностями вероятности $g_{x_i}(x) = \frac{d}{dx} F_{x_i}(x)$. Тогда случайна также величина y с некоторой функцией распределения $F_y(x)$. Найдем $F_y(x)$. По определению конъюнкции НЛ (1.20) $y = \min\limits_i x_i$. Поэтому $y \geq x$ только при $x_1 \geq x, ..., x_n \geq x.$ Отсюда $F_y(x) = P(y < x) =$ $= 1 - P(y \geq x) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} P(x_i \geq x) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} [1 - P(x_i < x)] = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} [1 - F_{x_i}(x)]$.

Таким образом,

$$F_y(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{x_i}(x)]. \tag{1.31}$$

Дифференцируя по x, найдем плотность вероятности y

$$g_y(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{x_j}(x) \prod_{i \neq j} [1 - F_{x_i}(x)]. \tag{1.32}$$

Для одинаково распределенных аргументов $x_i, i = 1, ..., n$:

$$F_y(x) = 1 - [1 - F(x)]^n; \tag{1.33}$$

$$g_y(x) = ng(x)[1 - F(x)]^{n-1}, \tag{1.34}$$

где $F(x)$ и $g(x)$ – функция распределения и плотность вероятности аргумента.

2. Рассмотрим функцию НЛ – дизъюнкцию

$$y = \bigvee_{i=1}^{n} x_i \tag{1.35}$$

с прежними (см. п. 1) случайными аргументами x_i. Так как по определению дизъюнкции (1.21) $y = \max_i x_i$, то $y < x$ только при $x_1 < x, ..., x_n < x$. Отсюда функция распределения величины y

$$F_y(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{x_i}(x), \tag{1.36}$$

ее плотность вероятности

$$g_y(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{x_j}(x) \prod_{i \neq j} F_{x_i}(x). \tag{1.37}$$

Для одинаково распределенных аргументов $x_i, i = 1, ..., n$:

$$F_y(x) = [F(x)]^n; \tag{1.38}$$

$$g_y(x) = ng(x)[F(x)]^{n-1}. \tag{1.39}$$

3. Рассмотрим функцию НЛ в виде ДНФ без общих аргументов в различных конъюнкциях. Все аргументы – независимые случайные величины. Распределение такой функции можно найти, используя формулы распределения конъюнкции (п. 1) и дизъюнкции (п. 2).

Пример 1.12. Функция НЛ имеет вид: $D = x_1 x_2 \vee x_3 x_4$. Аргументы x_i независимы и распределены по одному и тому же закону с функцией распределения $F(x)$ и плотностью вероятности $g(x)$. Найдем распределение величины D.

Согласно (1.33), (1.34) конъюнкции $x_1 x_2$ и $x_3 x_4$ имеют одинаковые функцию распределения $\hat{F}(x) = 1 - [1 - F(x)]^2 = F(x)[2 - F(x)]$ и плотность вероятности $\hat{g}(x) = 2g(x)[1 - F(x)]$. Величина D согласно (1.38), (1.39) имеет функцию распределения

$$F_D(x) = \hat{F}^2(x) = F^2(x)[2 - F(x)]^2$$

и плотность вероятности

$$g_D(x) = 2\hat{g}(x)\hat{F}(x) = 4g(x)F(x)[1 - F(x)][2 - F(x)].$$

4. Для отыскания распределения функции НЛ общего вида используется метод расчленения (см. § 1.3).

Пример 1.13. Функция НЛ имеет вид: $y = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ (функция-медиана принимает значение средней из переменных x_1, x_2, x_3). Аргументы x_i зависимы и распределены с совместной плотностью вероятности

$$g(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} g(x_1,x_2,x_3) & \text{при } x_1 \le x_2 \le x_3; \\ g(x_1,x_2,x_3) & \text{при } x_3 \le x_2 \le x_1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдем функцию распределения $F_y(x)$ величины y. Сначала расчленим событие $(y<x)$: $(y < x) = (x_1 \le x_2 \le x_3,\, x_2 < x) \cup (x_1 \le x_3 \le x_2,\, x_3 < x) \cup (x_3 \le x_1 \le x_2,$ $x_1 < x) \cup (x_2 \le x_1 \le x_3,\, x_1 < x) \cup (x_2 \le x_3 \le x_1,\, x_3 < x) \cup (x_3 \le x_2 \le x_1,\, x_2 < x)$. Отсюда, с учетом заданной совместной плотности вероятности аргументов функции $f(\cdot)$, получаем $F_y(x) = P(y < x) = \iiint\limits_{\substack{x_1 \le x_2 \le x_3 \\ x_2 < x}} g_1(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3 + \iiint\limits_{\substack{x_3 \le x_2 \le x_1 \\ x_2 < x}} g_2(x_1,x_2,$ $x_3)dx_1dx_2dx_3$, и для получения явного выражения $F_y(x)$ остается задать явные выражения функций $g_1(\cdot)$ и $g_2(\cdot)$ и проинтегрировать.

Другой универсальный прием основан на методе Монте-Карло, то есть:

1) генерировании N независимых наборов случайных аргументов $x_1,...,x_n$ заданной функции НЛ $y = f(x_1,...,x_n)$ в соответствии с заданным распределением этих аргументов;

2) подсчете для каждого набора $(x_1,...,x_n)$ соответствующего значения функции y;

3) подсчете частоты попадания значений функции y в различные подобласти области ее определения, что дает оценку распределения значений y.

Этот прием, в отличие от предыдущего, применим к весьма сложным функциям НЛ. Однако его погрешность мала лишь при больших N.

5. Как следует из пп. 1, 2, для отдельных классов функций НЛ $y = f(x_1,...,x_n)$, вероятностное распределение значений y можно найти, минуя аналитическое представление функции, базируясь лишь на ее содержательном смысле. Рассмотрим более сложный пример таких функций – порядковую r-функцию

$$X_n^r = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{vmatrix}^{(r)} \tag{1.40}$$

со случайными независимыми элементами x_i, распределенными по одному и тому же закону с распределением $F(x)$ и плотностью вероятности $g(x)$. Найдем плотность вероятности $g_n^r(x)$ величины X_n^r.

Расположим элементы логического определителя (1.40) в порядке неубывания: $x^{(1)} \le x^{(2)} \le ... \le x^{(n)}$. По определению $X_n^r = x^{(r)}$. Значит, среди n элементов x_i имеется $(r-1)$ не больших X_n^r и $(n-r)$ не меньших X_n^r. Найдем вероятность $g_n^r(x)dx$ того, что значение X_n^r находится в интервале $(x, x+dx)$. Ясно, что

$$g_n^r(x)dx = P_1P_2P_3, \tag{1.41}$$

где $P_1 = ng(x)dx$ – вероятность того, что какой-либо из n элементов x_i находится в интервале $(x, x+dx)$; $P_2 = C_{n-1}^{r-1} F^{r-1}(x)$ – вероятность того, что из оставшихся $(n-1)$ элементов x_i ровно $(r-1)$ каких-то элементов находятся в интервале $(-\infty, x)$; $P_3 = [1-F(x)]^{n-r}$ – вероятность того, что оставшиеся $(n-r)$ элементов x_i находятся в интервале $(x+dx, \infty)$. Подставив выражения P_i в (1.41), получим

$$g_n^r(x) = nC_{n-1}^{r-1} F^{r-1}(x) g(x) [1-F(x)]^{n-r}. \quad (1.42)$$

Из (1.42) при $r=1$ и $r=n$, как частные случаи, следуют ранее полученные выражения (1.34) и (1.39) плотности вероятности двух функций НЛ: конъюнкции и дизъюнкции.

Список литературы

1. Ллойд, Д.К. Надежность: организация, исследования, методы, математический аппарат / Д.К. Ллойд, М. Липов. – М. : Советское радио, 1964. – 350 с.
2. Барлоу, Р. Математическая теория надежности / Р. Барлоу, Ф. Прошан. – М. : Советское радио, 1969. – 410 с.
3. Райншке, К. Модели надежности и чувствительности систем / К. Райншке. – М. : Мир, 1979. – 454 с.
4. Левин, Б.Р. Теория надежности радиотехнических систем / Б.Р. Левин. – М. : Советское радио, 1978. – 264 с.
5. Поспелов, Д.А. Логические методы анализа и синтеза схем / Д.А. Поспелов. – М. : Энергия, 1974. – 368 с.
6. Левин, В.И. Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики / В.И. Левин. – М. : Радио и связь, 1982. – 176 с.

Logical Methods in Reliability Theory. I. Mathematical Apparatus

V.I. Levin

Penza State Technological Academy;
levin@pgta.ac.ru

Key words and phrases: bivalent logic; continuous logic; laws of logic; model of reliability.

Abstract: The paper describes discrete binary and continuous logic as mathematical apparatus for modeling both statics and dynamics of reliability.

Logische Methoden in der Sicherheitstheorie

Zusammenfassung: Es sind die für die Modellierung der Statistik und Dynamik der Sicherheit als matematischen Apparat dienenden diskreten zweistelligen und kontinuierlichen Logiken beschrieben.

Méthodes logiques dans la théorie de la sûreté.
I. Appareil mathématique

Résumé: Sont décrites les logiques discrète et discontinue servant respectivement de l'appareil mathématique pour le modélage de la statistique et de la dynamique de la sûreté.

Автор: ***Левин Виталий Ильич*** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Научные технологии», ГОУ ВПО «ПГТА».

Рецензент: ***Муромцев Дмитрий Юрьевич*** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем», ГОУ ВПО «ТГТУ».
