

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМИЧЕСКИ НАГРУЖЕННЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРОВ

Ю.А. Прокопенко

*Кафедра общей и теоретической физики, ГОУ ВПО «Таганрогский
государственный педагогический институт»; uranum83@mail.ru*

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: напряжения; стеклянное покрытие; термостойкость.

Аннотация: Исследуется напряженно-деформированное состояние двухслойного цилиндра при нестационарном тепловом воздействии. На основании проведенного исследования рассчитывается термическая стойкость стеклянного цилиндра, охваченного снаружи металлической оболочкой при различных условиях охлаждения этой конструкции. Проводится сравнение теоретических значений с экспериментальными данными.

Стальные трубы с внутренним стеклянным покрытием, полученные баллонным способом [1], предназначены для работы на химических предприятиях в условиях высоких температур и давлений. В процессе эксплуатации таких труб происходят резкие термические удары, которые могут привести к разрушению стеклянной оболочки.

В связи с этим образцы остеклованной трубы исследуются на термостойкость в лабораторных условиях. Образец нагревается до определенной температуры, выдерживается некоторое время при ней до полного прогрева и далее опускается в охлаждающую среду (воду). Если покрытие не разрушилось, то испытание повторяется, с повышением температуры нагрева на 10 К. За меру термостойкости принимается разность температур ($T_0 - \theta$), при которой образец разрушается: T_0 – температура нагретого образца; θ – температура охлаждающей среды.

Термостойкость стеклянного покрытия зависит от нескольких факторов. Первым из них является термостойкость стекла, используемого для покрытия, вторым, – степень сцепления стекла с металлом и, наконец, третьим, весьма важным фактором, – величина усадочных напряжений, зависящих от разности коэффициентов термического расширения стекла и металла.

Технология получения остеклованных труб заключается в раздувании стеклянного баллона внутри стальной трубы, разогретой до температуры нанесения покрытия T_n , выдержки при ней и медленного охлаждения изделия. В работе [2] проведено экспериментальное исследование термостойкости внутреннего стеклянного покрытия из стекла № 1 на стальных трубах (сталь 10), полученных при различных температурах нанесения покрытия. При этом термомеханические постоянные стеклометаллической трубы следующие: стекло № 1 (индекс 1); сталь

10 (индекс 2); модули упругости $E_1 = 6,644 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $E_2 = 19,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²; коэффициенты термического расширения $\alpha_{T_1} = 89 \cdot 10^{-7}$ К⁻¹; $\alpha_{T_2} = 146 \cdot 10^{-7}$ К⁻¹; коэффициенты Пуассона $\nu_1 = 0,22$; $\nu_2 = 0,28$; плотности $\rho_1 = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³; $\rho_2 = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; удельные теплоемкости $c_1 = 960$ Дж/(кг·К); $c_2 = 500$ Дж/(кг·К); теплопроводности $\lambda_{T_1} = 0,878$ Вт/(м·К); $\lambda_{T_2} = 57$ Вт/(м·К); прочность стекла на растяжение в воде $\sigma = 5,63 \cdot 10^7$ Н/м²; температура стеклования $T_g = 813$ К; температура охлаждающей среды $\theta = 293$ К. Геометрические размеры: внешний радиус стальной трубы $R = 16 \cdot 10^{-3}$ м; внутренний радиус стальной трубы (внешний стеклянной) $r_c = 14 \cdot 10^{-3}$ м; внутренний радиус стеклянной трубы $r_0 = 13,5 \cdot 10^{-3}$ м; длина трубы $l = 10^{-1}$ м.

На рис. 1 приведены данные по испытанию на термостойкость образцов остеклованных труб при внутреннем 1 и двухстороннем 2, 3 охлаждении средой при различных температурах нанесения покрытия [2].

Расчет термостойкости стеклянного покрытия заключается в следующем. В процессе резкого охлаждения на поверхности стеклянного покрытия за счет градиента температур возникают напряжения растяжения. Кроме того, в покрытии действуют напряжения, возникающие за счет разности коэффициентов термического расширения стекла и металла. Эти напряжения являются причиной разрушения покрытия, если они превышают прочность стекла на растяжение.

Расчет нестационарного температурного поля и соответствующих ему температурных напряжений для указанного выше случая приведен в работе автора [3]. При этом уравнение теплопроводности рассматривалось для стеклянного цилиндра, на внутренней поверхности которого происходит теплоотдача в среду известной температуры. На внешней поверхности введено нестандартное граничное условие, учитывающее теплопроводные и теплоемкие свойства металлической трубы, а также теплоотдачу в среду известной температуры.

Термонапряженное состояние двухслойного цилиндра исследовалось вдали от торцов, где, согласно принципу Сен-Венана, выполняется обобщенное плоскодеформированное состояние. На контакте между стеклом и металлом соблюдается частичное проскальзывание цилиндров в осевом направлении, которое определяется температурой нанесения стеклянного покрытия на внутреннюю поверхность металлической трубы. При этом учитывались предельные случаи идеального проскальзывания труб (соединение с натягом) и полное сцепление стекла с металлом (спай).

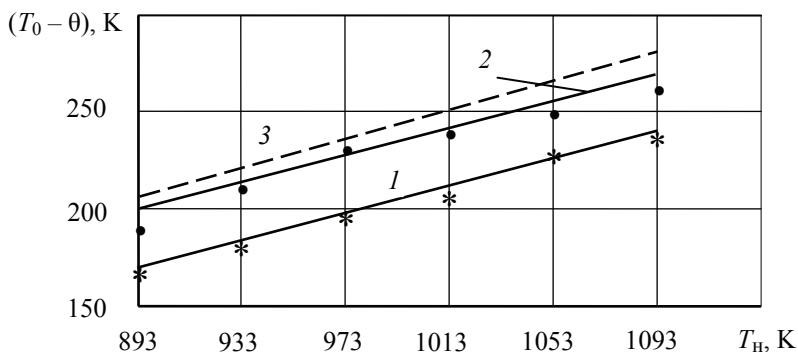


Рис. 1. Зависимость термостойкости стеклянного покрытия от температуры нанесения:

1 – внутреннее охлаждение; 2, 3 – двухстороннее охлаждение

Из температурных напряжений наиболее опасным в покрытии оказалось осевое напряжение, которое имеет вид:

$$\sigma_{zz}^*(\rho, Fo) = \frac{\left(\sigma_{zz}^1(\rho, Fo) + \chi \frac{\beta + 2\gamma}{\eta\beta - 2\gamma^2} \mu (\alpha_{T_1} - \alpha_{T_2}) (T'_g - \theta) \right) (1 - \nu_1)}{\alpha_{T_1} E_1 (T_0 - \theta)} = \sum_n^{\infty} E_n G(y_n \rho) e^{-y_n^2 Fo}; \quad (1)$$

$$E_n = \frac{\pi c_n [c_n \text{Bi}_1 + a_n \text{Bi}_2 (1+k)]}{(\text{Bi}_1^2 + m^2 y_n^2) c_n^2 - \left\{ \left[\text{Bi}_2 (1+k) - \omega k \left(1 + \frac{k}{2} \right) y_n^2 \right]^2 + y_n^2 \left[1 + 2\omega k \left(1 + \frac{k}{2} \right) \right] \right\} a_n^2};$$

$$G(y_n \rho) = b_n \left[\frac{2}{(1-m^2) y_n^2} e_n - J_0(y_n \rho) \right] - a_n \left[\frac{2}{(1-m^2) y_n^2} f_n - Y_0(y_n \rho) \right] - \frac{1-\nu_1}{E_1} \chi \frac{\beta + 2\gamma}{\eta\beta - 2\gamma^2} \mu \left[b_n \left\{ \frac{2}{(1-m^2) y_n^2} e_n - \alpha J_0(y_n) \right\} - a_n \left\{ \frac{2}{(1-m^2) y_n^2} f_n - \alpha Y_0(y_n) \right\} \right];$$

$$a_n = m y_n J_1(m y_n) + \text{Bi}_1 J_0(m y_n);$$

$$b_n = m y_n Y_1(m y_n) + \text{Bi}_1 Y_0(m y_n);$$

$$c_n = y_n J_1(y_n) - \left[\text{Bi}_2 (1+k) - \omega k \left(1 + \frac{1}{2} k \right) y_n^2 \right] J_0(y_n);$$

$$e_n = y_n J_1(y_n) - m y_n J_1(m y_n);$$

$$d_n = y_n Y_1(y_n) - \left[\text{Bi}_2 (1+k) - \omega k \left(1 + \frac{1}{2} k \right) y_n^2 \right] Y_0(y_n);$$

$$f_n = y_n Y_1(y_n) - m y_n Y_1(m y_n);$$

$$\mu = \frac{r_c^2 - R^2}{r_c^2 - r_0^2};$$

$$\gamma = \mu \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2};$$

$$\eta = \frac{\mu}{E_1} - \frac{1}{E_2};$$

$$k = \frac{d}{r_c};$$

$$\rho = \frac{r}{r_c};$$

$$m = \frac{r_0}{r_c};$$

$$a_1 = \frac{\lambda_{T_1}}{\rho_1 c_1};$$

$$\beta = \mu \left(1 + \frac{r_0^2}{r_c^2} \right) \frac{1}{E_2} + \left(1 - \frac{R^2}{r_c^2} \right) \left(\frac{v_2}{E_2} - \frac{v_1}{E_1} \right) - \left(1 + \frac{R^2}{r_c^2} \right) \frac{1}{E_2};$$

$$d = R - r_c;$$

$$Bi_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda_{T_1}} r_0;$$

$$Bi_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda_{T_2}} \frac{1}{1 + \alpha_2 d / \lambda_{T_2}} r_c;$$

$$Fo = \frac{a_1 t}{r_c^2};$$

$$\omega = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \frac{1 + \alpha_2 d / 2\lambda_{T_2}}{1 + \alpha_2 d / \lambda_{T_2}},$$

где Bi_1, Bi_2 – критерии Био; $J_0(y), J_1(y), Y_0(y), Y_1(y)$ – функции Бесселя от действительного аргумента нулевого и первого порядка, первого и второго рода соответственно; α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи от внутренней и внешней поверхности двухслойного цилиндра соответственно; y_n – корни уравнения

$$a_n d_n - b_n c_n = 0; \quad (2)$$

χ – степень сцепления металла со стеклом. При $\chi = 0$ сцепление отсутствует (соединение с натягом); при $\chi = 1$ – на границе между металлом и стеклом спай; при $0 < \chi < 1$ – частичное проскальзывание на границе металла и стекла. Процессы, происходящие на границе между металлом и стеклом, а также определение степени сцепления между металлом и стеклом при нанесении покрытий баллонным способом, подробно описаны в литературе [1]. T'_g – температура отсчета, при которой стеклометаллическая труба не напряжена и ниже которой она является упругим телом. В работах [4, 5] в качестве такой температуры выбиралась температура стеклования неорганического стекла T_g , при которой происходит резкое изменение его физических свойств (вязкости, коэффициента термического расширения, плотности). Однако это не совсем так. Используя зависимость вязкости боросиликатного неорганического стекла от температуры, приведенную в [5], найдем зависимость релаксирующих температурных напряжений в стеклянном покрытии от времени при охлаждении цилиндра. В эксперименте [1] охлаждение остеклованной трубы происходило очень медленно по линейному закону со скоростью один градус в минуту. Поэтому можно считать, во-первых, что стекло находится в равновесном состоянии и, во-вторых, что в трубе не возникает температурных градиентов, а температурные напряжения возникают лишь за счет разно-

сти коэффициентов термического расширения стекла и металла. Если стекло находится в равновесном состоянии, то релаксация в области небольших напряжений подчиняется модели Максвелла [5]. На основании использования этой модели в данной работе произведен расчет изменения температурных напряжений в стеклянном покрытии на металлической пластине таких же толщин, что и толщины стенок цилиндров с учетом изменения вязкости и коэффициента термического расширения стекла с температурой при охлаждении конструкции. Решение термовязкоупругой задачи с переменными во времени вязкостью стекла и его коэффициента термического расширения проводилось численно разбиением температурного интервала на временные участки, на каждом из которых температура, вязкость и коэффициент термического расширения стекла считались постоянными. Конечные значения релаксирующего на временном участке напряжения в сумме с термоупругим напряжением, возникающим за счет скачкообразного уменьшения температуры в конце временного участка, принималось за начальное значение напряжения на следующем временном участке.

Изменение температурных напряжений в стеклянном покрытии с уменьшением его температуры во времени показано на рис. 2, при температуре стеклования $T_g = 813$ К напряжение обращается в нуль, ниже температуры стеклования напряжение продолжает релаксировать и, только начиная с температуры ~ 603 К, релаксация прекращается (график выходит на линейный участок). Из рисунка видно, что температуру $T'_g \sim 773$ К необходимо выбрать в качестве температуры отсчета, то есть только ниже этой температуры стекло можно считать упругим телом.

Для расчета температурных напряжений и термостойкости необходимы значения коэффициентов теплоотдачи α_1, α_2 . Согласно [6] коэффициент теплоотдачи α нагретого тела воде при перепаде температур ~ 220 К равен $25 \cdot 10^3$ Вт/(м²·К). Выбранное значение коэффициента теплоотдачи подтверждается также тем, что расчетное значение термостойкости однослойного цилиндра (применяемого для покрытия), приведенное в данной работе, равно 112 К. Это хорошо совпадает с экспериментальным значением 110 К, полученным в [1]. Поэтому, согласно приведенным выше постоянным, $Bi_1 \sim 380, Bi_2 \sim 210$.

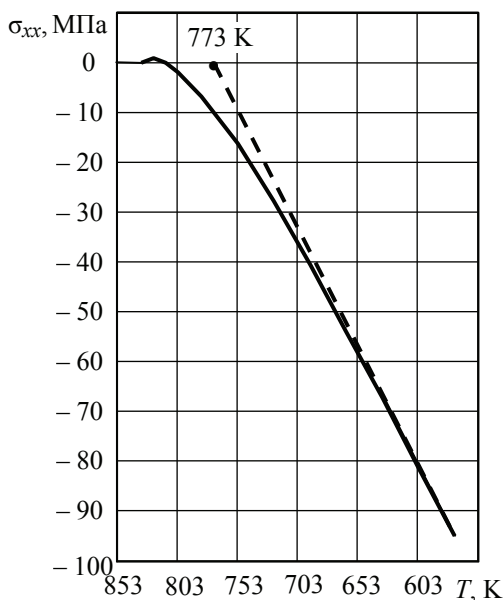
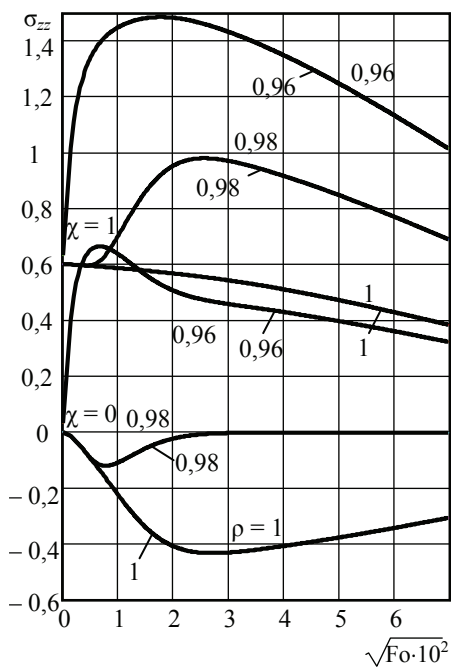
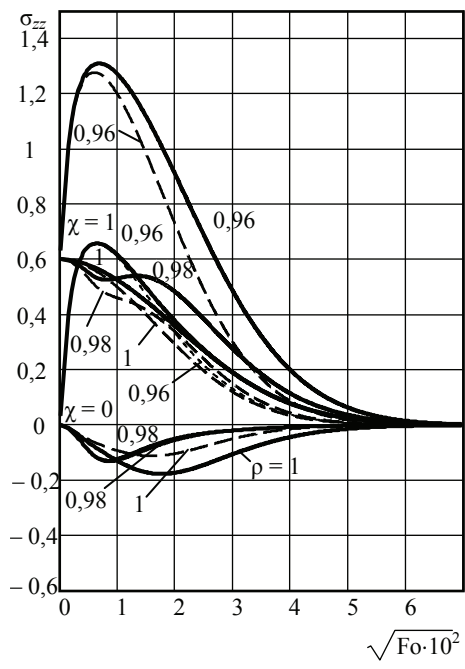


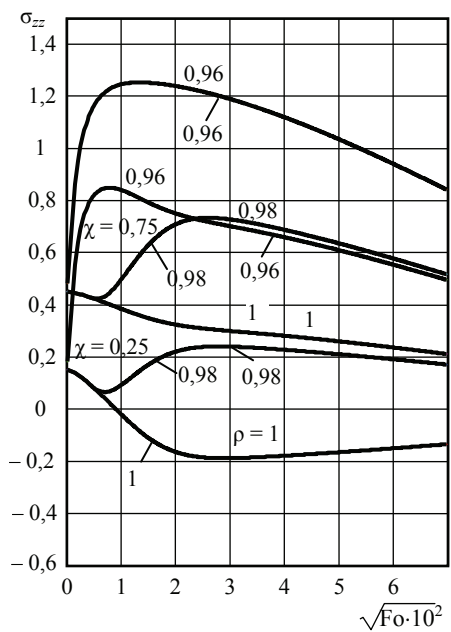
Рис. 2. Зависимость температурных напряжений в покрытии при его охлаждении



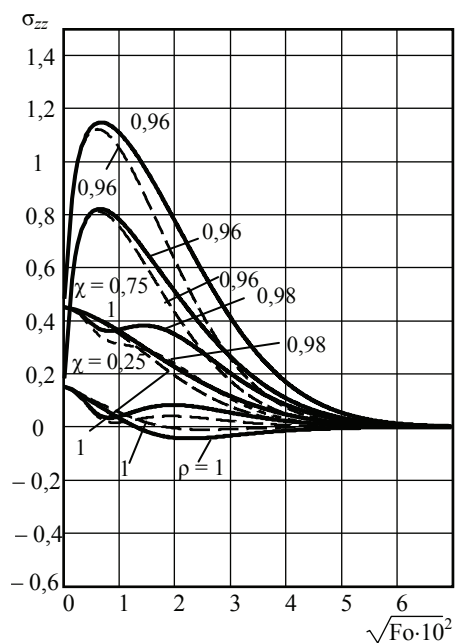
a)



b)



v)



z)

Рис. 3. Распределение осевых напряжений в зависимости от времени при различной степени сцепления:

a, v – внутреннее охлаждение; б, z – двустороннее охлаждение

На рис. 3, a приведено распределение осевых температурных напряжений по сечению стеклянного цилиндра в зависимости от времени Fo для $\chi = 0$ и $\chi = 1$, а на рис. 3, v для $\chi = 0,25$ и $\chi = 0,75$ в случае внутреннего охлаждения ($Bi_2 = 0$).

На рис. 3, б, з приведены те же распределения для двухстороннего охлаждения $Bi_2 = 210$. Пунктирными линиями изображены распределения напряжения при условии, что металлическая труба – идеальный проводник теплоты $\lambda_{T_2} \rightarrow \infty$.

Для определения термостойкости стеклянного покрытия необходимо иметь в виду, что согласно (1) при достижении $\sigma_{zz}^*(\rho, Fo)$ на поверхности покрытия ($\rho = m = 0,96$) максимальной величины осевое напряжение $\sigma_{zz}^{(1)}(\rho, Fo)$ тоже максимально. Если это осевое напряжение достигает прочности стекла на растяжение σ , то $(T_0 - \theta)$ окажется равной термостойкости. Однако поскольку поверхность стекла во время разрушения находится в контакте с горячей водой, то необходимо при расчете термостойкости использовать прочность стекла, измеренную в воде. Согласно [7] прочность стекла в воде уменьшается на 20–30 %, а в [5] прочность, измеренная в воде при температуре 353 К, уменьшается на 29 %. С учетом этого термостойкость согласно (1) рассчитывается из следующего выражения

$$T_0 - \theta = \frac{\left(\sigma + \chi \frac{\beta + 2\gamma}{\eta\beta - 2\gamma^2} \mu (\alpha_{T_2} - \alpha_{T_1}) (T'_g - \theta) \right) (1 - \nu_1)}{\alpha_{T_1} E_1 \sigma_{zz}^*(m, Fo)_{\max}}. \quad (3)$$

Максимальные значения во времени $\sigma_{zz}^*(m, Fo)_{\max}$ на поверхности покрытия ($\rho = 0,96$) даны на графиках рис. 3, а – з.

Теоретические значения термостойкости, с учетом термомеханических постоянных и геометрических размеров, приведенных выше рассчитанные по (3), приведены на рис. 1 в виде линий 1–3. Как видно из рис. 1, при внутреннем охлаждении теоретические 1 и экспериментальные данные хорошо согласуются. При двухстороннем охлаждении теоретические кривые 2, 3 проходят несколько выше экспериментальных данных. Причем теоретическая кривая, учитывающая теплоемкие и теплопроводные свойства металла 2, лучше совпадает с экспериментом, чем кривая, в которой металлическая труба считается идеальным проводником теплоты $\lambda_{T_2} \rightarrow \infty$. Завышенные теоретические значения термостойкости в случае двухстороннего охлаждения объясняются более высокими градиентами температур в металлической трубе по сравнению с реальным случаем. В связи с этим из-за разности коэффициентов термического расширения стекла и металла в покрытии возникают более высокие напряжения сжатия. Причем для идеального проводника теплоты (кривая 3) эта разница больше (пунктирные кривые на рис. 3, б, з проходят ниже по сравнению со сплошными).

Список литературы

1. Кулямина, Л.Л. Стеклянные покрытия внутренней поверхности стальных труб / Л.Л. Кулямина // Стекло. – 1964. – № 3. – С. 95–98.
2. Кулямина, Л.Л. Термическая устойчивость внутреннего стеклянного покрытия на стальных трубах / Л.Л. Кулямина, А.И. Жорник // Стекло. – 1968. – № 3. – С. 15–21.
3. Жорник, В.А. Температурные напряжения в двухслойных цилиндрах / В.А. Жорник, Ю.А. Прокопенко // Наука и технология : тр. XXVIII Рос. шк. / Рос. акад. наук. – М., 2008. – Т. 1. – С. 62–70.
4. Бартнев, Г.М. Температурные напряжения в стеклянном покрытии на металлических трубах / Г.М. Бартнев, А.И. Жорник // Физика и химия обработки материалов – 1972. – № 3. – С. 100–108.
5. Бартнев, Г.М. Механические свойства и тепловая обработка стекла / Г.М. Бартнев. – М. : Стройиздат, 1960. – 166 с.

6. Кутателадзе, С.С. Основы теории теплообмена / С.С. Кутателадзе. – Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1970. – 659 с.

7. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.

Mathematical Modeling of Thermally Loaded Two-Layer Cylinders

Yu.A. Prokopenko

*Department of General and Theoretical Physics,
Taganrog State Teachers' Training Institute;
uranum83@mail.ru*

Key words and phrases: glass covering; stresses; thermal stability.

Abstract: The paper studies the stress-strain state of a two-layer cylinder under non-stationary heat impact. On the basis of the given research the thermal heat resistance of the glass cylinder covered outside with metal coating under different cooling conditions of this structure is calculated. The comparison of theoretical and experimental data is made.

Matematische Modellierung der thermisch belasteten zweischichtigen Zylinder

Zusammenfassung: Im Artikel wird den gespannt-deformierte Zustand des zweischichtigen Zylinders bei der unstationären Wärmeeinwirkung untersucht. Auf Grund der durchgeführten Untersuchung wird die thermische Festigkeit des Glaszylinders, der von der Metallhülle umgeben ist, berechnet. Es wird die Vergleichung der theoretischen Bedeutungen mit den experimentellen Angaben durchgeführt.

Modélage mathématique des cylindres chargés thermiquement à deux couches

Résumé: Dans l'ouvrage est examiné l'état de tension et de déformation du cylindre à deux couches lors de l'action thermique non stationnaire. A la base de l'étude effectuée est calculée la rigidité thermique du cylindre vitré entouré d'une couche métallique lors de différentes conditions du refroidissement de cette construction. Est fait la comparaison des valeurs théoriques avec les données expérimentales.

Автор: *Прокопенко Юрий Александрович* – аспирант кафедры общей и теоретической физики, ГОУ ВПО «Таганрогский государственный педагогический институт».

Рецензент: *Карташов Эдуард Михайлович* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика», ГОУ ВПО «Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова».
