

ПРИМЕНЕНИЕ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ГОЛОВНОГО УБОРА ИЗ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Г.М. Андросова¹, И.Г. Браилов², С.В. Черепанова¹, Е.В. Бахтурина¹

Кафедра «Технология швейных изделий», ГОУ ВПО «Омский государственный институт сервиса» (1); *svetlanakubaeva@rambler.ru*;
кафедра «Прикладная механика», ГОУ ВПО «Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия» (2)

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: криволинейный контур; матричный элемент; нормализованный кубический сплайн; объемные поверхности.

Аннотация: Рассмотрено проектирование объемных поверхностей из матричных элементов на примере головного убора. Осуществлено построение развертки поверхности, описание ее контура кубическим сплайном, вписывание в ее контур матричных элементов. Разработан алгоритм проектирования головного убора из матричных элементов.

Введение

Благодаря высоким эстетическим и эксплуатационным свойствам продукция из кожевенно-меховых полуфабрикатов пользуется широким спросом у потребителей. Натуральные мех и кожа применяются для изготовления изделий различного назначения: верхняя одежда, обувь, головные уборы, аксессуары и т.д. Кожевенно-меховой полуфабрикат является дорогостоящим сырьем, однако, при его раскюре образуется до 20 % ценных межлекальных и краевых отходов [1, с. 36–39]. Поэтому совершенствование существующих и разработка новых способов использования отходов является важной задачей.

В настоящее время предложено большое количество решений по применению отходов при изготовлении изделий, в основе которых лежит обкрой шкурок или частей шкурок по шаблонам или разрезание их на полосы с последующим соединением ниточным или клеевым способом в полотна.

Одним из перспективных направлений использования отходов кожевенно-мехового сырья является способ получения полотен из матричных элементов, объединяемых между собой с помощью соединительных элементов, в качестве которых используются кожаные шнурки, пуговицы, металлические скобы и др. [2]. Вариант полотна из матричных элементов представлен на рис. 1, а. Матричные элементы могут быть различной конфигурации, которая зависит от составляющих их элементов: основы 1, соединительных областей 2, декоративных 3 и соединительных 4 отверстий (рис. 1, б). Данный способ предполагает получение плоских поверхностей [3]. Традиционные способы формообразования, такие как влажно-тепловая обработка, конструктивные членения и формование, используемые для тканей, нетканых материалов, кожи и меха, неприменимы для создания объемных форм из матричных элементов, так как приводят к нарушению структуры и искажению рисунка.

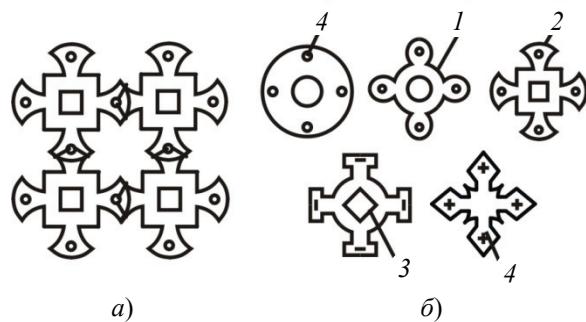


Рис. 1. Фрагмент полотна, состоящего из матричных элементов (а) и варианты матричных элементов (б)

1. Постановка задачи

В данной работе на примере головного убора рассматривается проектирование объемных поверхностей из матричных элементов. Объемная форма большинства головных уборов, с геометрической точки зрения, относится к неразвертываемым поверхностям вращения. Сложность проектирования поверхностей такого типа из матричных элементов заключается в том, что они являются не сплошными как полотна, а дискретными, вследствие чего для них может быть получена лишь приближенная развертка, ограниченная, как правило, криволинейным контуром. Поэтому при проектировании неразвертываемых поверхностей вращения встает задача размещения матричных элементов в пределах криволинейного контура развертки.

2. Построение развертки поверхности в виде клина

Разработан способ проектирования головного убора из кожи и меха, заключающийся в том, что задаются проекции головного убора (вид спереди и вид сверху), на которые наносятся проекции линий членения формы на одинаковые фрагменты – клинья (рис. 2) [4]. Далее производится построение одного клина способом вспомогательных цилиндрических поверхностей, и в его контур вписываются матричные элементы (рис. 3). При вписывании матричных элементов в клин учитывается их расположение по оси клина, а контуры областей соединения каждого элемента касаются контуров областей соединения предыдущего и боковых сторон клина. Количество вписываемых матричных элементов зависит от высоты клина и размеров матричных элементов.

Высота клина определяется формой головного убора и измерением «глубины головного убора». Величина основания клина определяется в зависимости от параметров выбранных матричных элементов и размера головного убора. С геометрической точки зрения клин представляет собой фигуру с прямолинейным основанием и с боковыми сторонами, имеющими сложную форму.

Для решения задачи размещения матричных элементов в клине необходимо иметь математическое описание формы клина. Криволинейный контур клина в работе описывается кубическими сплайнами. Решение поставленной задачи сводится к определению общих точек контуров клина и матричного элемента при вписывании.

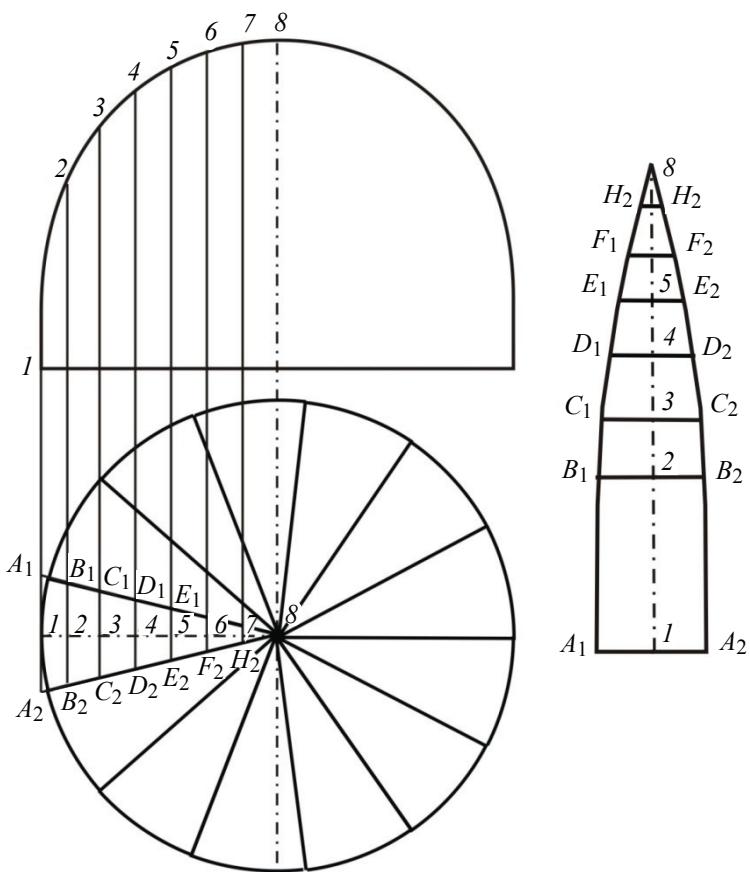


Рис. 2. Способ построения клина головного убора

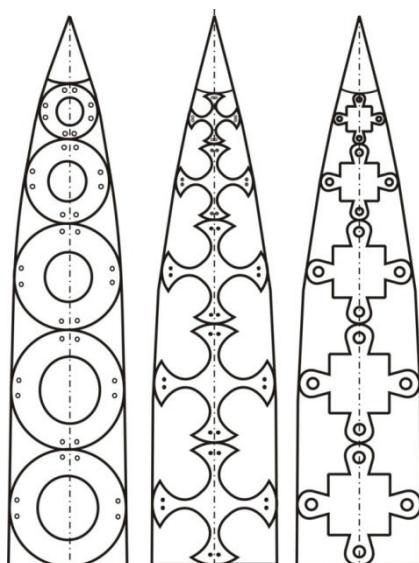


Рис. 3. Клины с вписанными матричными элементами

Для построения клина проекция головного убора помещается в декартову систему координат (рис. 4). Выбираются произвольные точки, разбивающие контур (кривая S) на участки. Количество точек выбирается в соответствии с размерами клина и выбранной точностью аппроксимации.

Кривая S аппроксимируется отрезками, длины которых l_k равны расстоянию между соседними точками

$$l_k = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}, \quad (1)$$

где $x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}$ – координаты крайних точек отрезков.

Высота клина L или длина его оси складывается из длин отрезков (рис. 5, а)

$$L = \sum_{k=1}^n l_k. \quad (2)$$

При вращении кривой S вокруг оси OY образуется поверхность (см. рис. 4). Любая точка данной кривой при этом движется по окружности, параллельной плоскости XOZ . Радиусы окружностей равны координатам точек контура по оси OX . Окружность, образуемая любой точкой кривой, делится на N равных дуг, соответствующих количеству клиньев, длины которых определяются по формуле

$$D_i = \varphi R_i = \frac{6,28}{N} R_i, \quad (3)$$

где φ – угол поворота; R_i – радиус i -й окружности. Координаты точек контура клина по оси OX равны $D_i/2$.

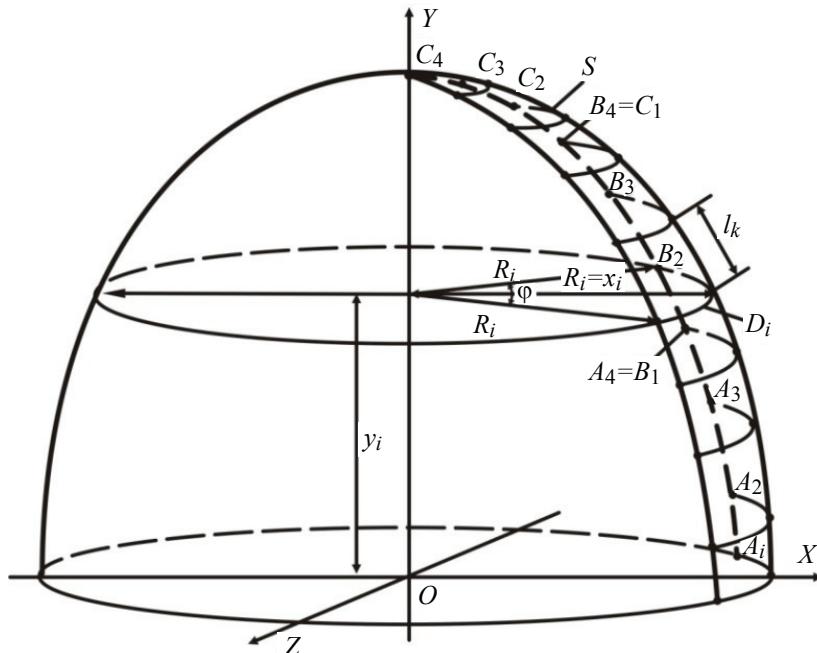


Рис. 4. Контур головного убора

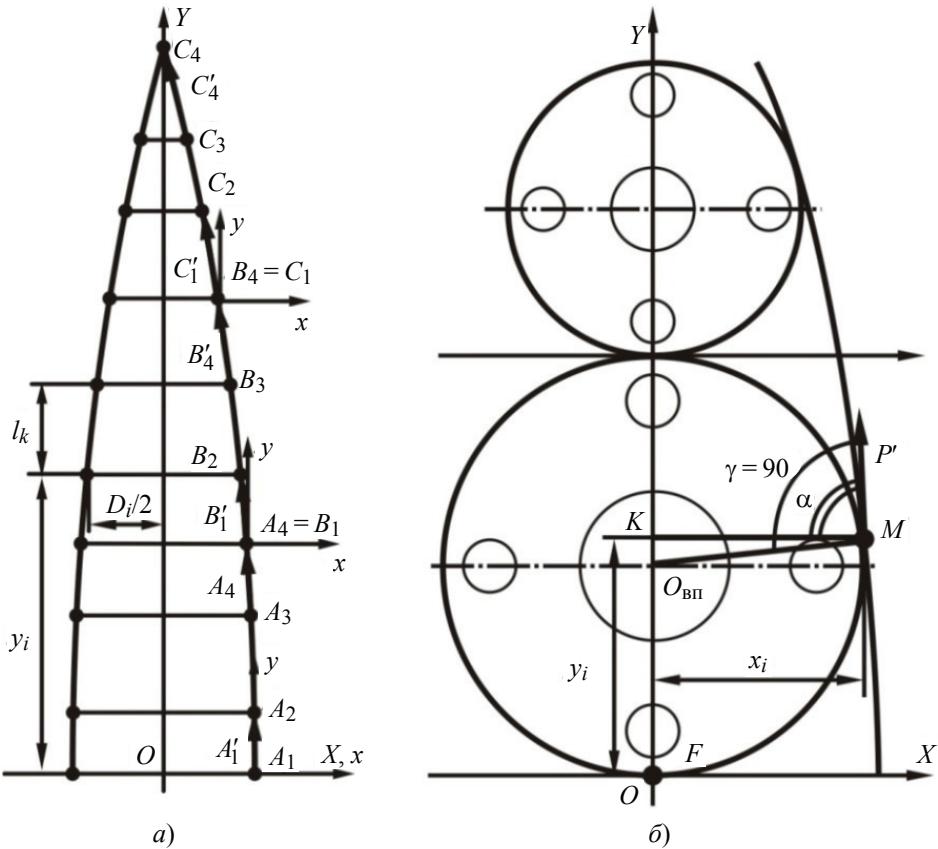


Рис. 5. Описание контура клина кубическим сплайном (а) и вписывание в контур клина окружностей (б)

Следовательно, абсциссы $x_i^{\text{кл}}$ и ординаты $y_i^{\text{кл}}$ точек контура фрагмента развертки (клина) рассчитываются по формулам (4) и (5):

$$x_i^{\text{кл}} = \frac{2\pi}{2N} x_i = \frac{\pi}{N} x_i; \quad (4)$$

$$y_i^{\text{кл}} = \sum_{k=1}^n l_k, \quad (5)$$

где l_k – длина аппроксимирующего отрезка; x_i – ордината точки контура головного убора.

Для получения промежуточных точек контур клина описывается нормализованным кубическим сплайном (рис. 5, а). Для этого каждый сегмент A_1A_4 , B_1B_4 , C_1C_4 помещается в локальную систему координат.

Обобщенное уравнение параметрического сплайна для k сегментов имеет вид [5]

$$\mathbf{P}_k(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)] = \sum_{i=1}^4 B_{ik} t^{i-1}, \quad 0 \leq t \leq t_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (6)$$

где t – параметр каждого сегмента сплайна; B_i – постоянные коэффициенты; t_{k+1} – значения параметров в конце сегмента; n – количество точек, через которые проходит сплайн.

Для получения касательных векторов точек сегмента сплайна используется уравнение в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 \\ 0 & t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P' \\ \frac{3}{t_2 t_3} \{t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1)\} \\ \frac{3}{t_3 t_4} \{t_3^2 (P_4 - P_3) + t_4^2 (P_3 - P_2)\} \\ P'_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

или с учетом t_k -нормализации [5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P' \\ 3\{(P_3 - P_2) + (P_2 - P_1)\} \\ 3\{(P_4 - P_3) + (P_3 - P_2)\} \\ P' \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Для расчета промежуточных точек сегмента находится матрица весовых функций, которая зависит от величин выбираемых параметров [5],

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{T}][\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Промежуточные точки для каждого сегмента сплайна рассчитываются при помощи уравнения [4]

$$\mathbf{P}_k(t) = [\mathbf{F}][\mathbf{G}] = [F_1(t) \ F_2(t) \ F_3(t) \ F_4(t)] \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ P'_k \\ P'_{k+1} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (10)$$

где $[\mathbf{G}]$ – матрица геометрии, которая меняется от сегмента к сегменту.

В табл. 1 представлены результаты вычислений промежуточных точек для сплайнового участка B_1B_4 .

3. Вписывание матричных элементов в контур клина

Принцип вписывания матричного элемента в криволинейный контур клина показан на рис. 5, б. Начало системы координат совпадает с серединой основания клина, а его ось принадлежит оси OY . Точка M является точкой касания клина и окружности, центр которой лежит на оси клина. Касательные P' в точке M , проведенные к окружности и к контуру клина равны. При этом, если точка F окружности совпадает с началом координат, то есть радиус первой окружности равен расстоянию от центра этой окружности до начала координат, то окружность является вписанной в контур клина.

Таблица 1

**Результаты вычислений промежуточных точек
для сплайнового участка B_1B_4**

Сегмент	Параметр сегмента	Координаты точек в локальной системе координат		Координаты точек в единой системе	
		x	y	x	y
B_1B_2	0	0,00	0,00	2,08	5,57
	1/8	-0,02	0,20	2,06	5,77
	2/8	-0,03	0,39	2,04	5,96
	3/8	-0,05	0,58	2,03	6,15
	4/8	-0,07	0,77	2,01	6,34
	5/8	-0,08	0,97	1,99	6,54
	6/8	-0,10	1,17	1,98	6,74
	7/8	-0,12	1,39	1,96	6,96
B_2B_3	0	-0,14	1,62	1,93	7,18
	1/8	-0,17	1,86	1,91	7,43
	2/8	-0,20	2,12	1,88	7,69
	3/8	-0,23	2,39	1,85	7,96
	4/8	-0,26	2,67	1,82	8,24
	5/8	-0,30	2,96	1,78	8,52
	6/8	-0,33	3,24	1,74	8,81
	7/8	-0,37	3,53	1,71	9,10
B_3B_4	0	-0,41	3,81	1,67	9,38
	1/8	-0,45	4,09	1,63	9,66
	2/8	-0,49	4,36	1,59	9,93
	3/8	-0,54	4,62	1,54	10,19
	4/8	-0,58	4,89	1,50	10,46
	5/8	-0,62	5,15	1,46	10,72
	6/8	-0,66	5,41	1,41	10,98
	7/8	-0,71	5,67	1,37	11,24
	1	-0,75	5,94	1,33	11,51

Уравнение касательного вектора к контуру сплайна в общем виде выглядит следующим образом [5]:

$$P'(t) = [x'(t) \ y'(t) \ z'(t)] = \sum_{i=1}^4 B_i(i-1)t^{i-2}, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad (11)$$

Для вычисления касательных векторов кубического сплайна используется уравнение в виде

$$P'(t) = B_2 + 2B_3t + 3B_2t^2, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (12)$$

Уравнение для вычисления неизвестных коэффициентов B_i в матричном виде с учетом t_k -нормализации [4]

$$\begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{t_{k+1}^2} & -\frac{2}{t_{k+1}} & \frac{3}{t_{k+1}^2} & -\frac{1}{t_{k+1}} \\ \frac{2}{t_{k+1}^3} & \frac{1}{t_{k+1}^2} & -\frac{2}{t_{k+1}^3} & \frac{1}{t_{k+1}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P'_k \\ P_{k+1} \\ P'_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P'_k \\ P_{k+1} \\ P'_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Расчет угла наклона касательной, проведенной к контуру клина,

$$\alpha = \arctg \frac{y'(t)}{x'(t)}. \quad (14)$$

Радиус вписанной окружности $R_{\text{вп}}$ является гипотенузой треугольника ΔKMO

$$R_{\text{вп}} = MO_{\text{вп}} = \frac{MK}{\cos(\gamma - \alpha)} = \frac{x_i(t)}{\cos(90 - \alpha)}, \quad (15)$$

где $MK = x_i(t)$ – ордината точки M ; $\gamma = 90$ – угол между радиусом вписанной окружности и касательной; α – угол наклона касательной в точке M контура клина.

Расстояние от центра этой окружности до начала координат $OO_{\text{вп}}$ (см. рис. 5, б)

$$OO_{\text{вп}} = KO - KO_{\text{вп}} = y_i(t) - KO_{\text{вп}}, \quad (16)$$

где $KO = y_i(t)$ – абсцисса точки M ; $KO_{\text{вп}}$ – разница расстояний от точек $O_{\text{вп}}$ и M до начала координат, сторона треугольника $KMO_{\text{вп}}$, которая рассчитывается по формуле

$$KO_{\text{вп}} = R_{\text{вп}} \sin(90 - \alpha). \quad (17)$$

Если радиус вписанной окружности (1/2 ширины элемента) равен расстоянию от ее центра до начала координат с долей погрешности не более 0,2 %, то есть

$$\frac{OO_{\text{вп}} - R_{\text{вп}}}{R_{\text{вп}}} 100 \% \leq 0,2 \%, \quad (18)$$

то данный элемент является искомым (см. рис. 5, б). Вписывание элемента осуществляется до тех пор, пока он не достигнет размера 20 мм. Экспериментальные исследования показали, что размеры матричного элемента менее 20 мм технологически нецелесообразны.

Если размер элемента более 20 мм, центр координат переносится на $2R_{\text{вп}}$ вверх и снова производятся расчеты по формулам (15) – (18).

Если доля погрешности в (18) больше 0,2 % и 1/2 ширины матричного элемента, меньше расстояния от центра элемента до начала координат $OO_{\text{вп}}$, необходимо перейти к следующей точке и повторить расчеты по формулам (15) – (18). При

Таблица 2

Радиусы окружностей, вписанных в контур клина

Сегмент	Параметр	Координаты точек соприкосновения		Угол наклона касательной α	Радиус вписанной окружности $R_{\text{вп}}$, см	Расстояние от центра окружности до начала координат $OO_{\text{вп}}$, см	Относительная погрешность, %
		по оси OX , см	по оси OY , см				
A_2A_3	46/128	2,23	2,30	$-88,16^\circ$	2,22838	2,22653	0,08
B_1B_2	22/32	1,99	6,64	$-84,84$	1,99822	1,99753	0,03
B_3B_4	13/32	1,53	10,26	$-80,84$	1,54994	1,55189	0,13
C_1C_2	211/256	1,06	12,86	$-78,29$	1,08249	1,08159	0,08
C_2C_3	91/128	0,68	14,57	$-76,97$	0,69789	0,69784	0,01

обратном неравенстве необходимо увеличить количество разбиений на соответствующем участке сплайна, то есть увеличить количество параметров t для расчета дополнительных точек. В табл. 2 приведены результаты расчетов при вписывании матричных элементов, граничный контур соединительной области которых представляет собой участок окружности.

При использовании разработанной методики спроектирован головной убор из матричных элементов в виде кругов, представленный на рис. 6.

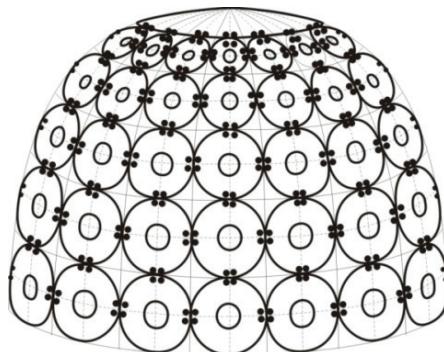


Рис. 6. Головной убор из матричных элементов в виде кругов

4. Разработка алгоритма проектирования головного убора из матричных элементов

Для автоматизации процесса проектирования головных уборов из матричных элементов, в частности для вписывания матричных элементов в виде кругов, разработан алгоритм (рис. 7).

Сначала вводятся координаты точек контура головного убора и количество клиньев (блок 1). После аппроксимация контура отрезками между соседними точками (блок 2) производится расчет координат точек клина по осям OY и OX , а также длина его оси (блок 2).

Контур клина описывается кубическим сплайном. Для расчета промежуточных точек (блоки 3, 4) и коэффициентов B (блок 5) используются уравнения в матричной форме. После расчета углов наклона касательных в точках контура клина (блок 6) определяется радиус вписанной окружности (блок 7) и расстояние от ее центра до начала координат (блок 8). Если радиус вписанной окружности равен расстоянию от ее центра до начала координат с долей погрешности не более 0,2 % (блоки 9–15), то данная окружность является искомой. Проверяется размер вписанного матричного элемента. Если размер элемента более 20 мм, центр координат переносится на $2R_{\text{вп}}$ вверх, и снова производятся расчеты (блоки 7–9).

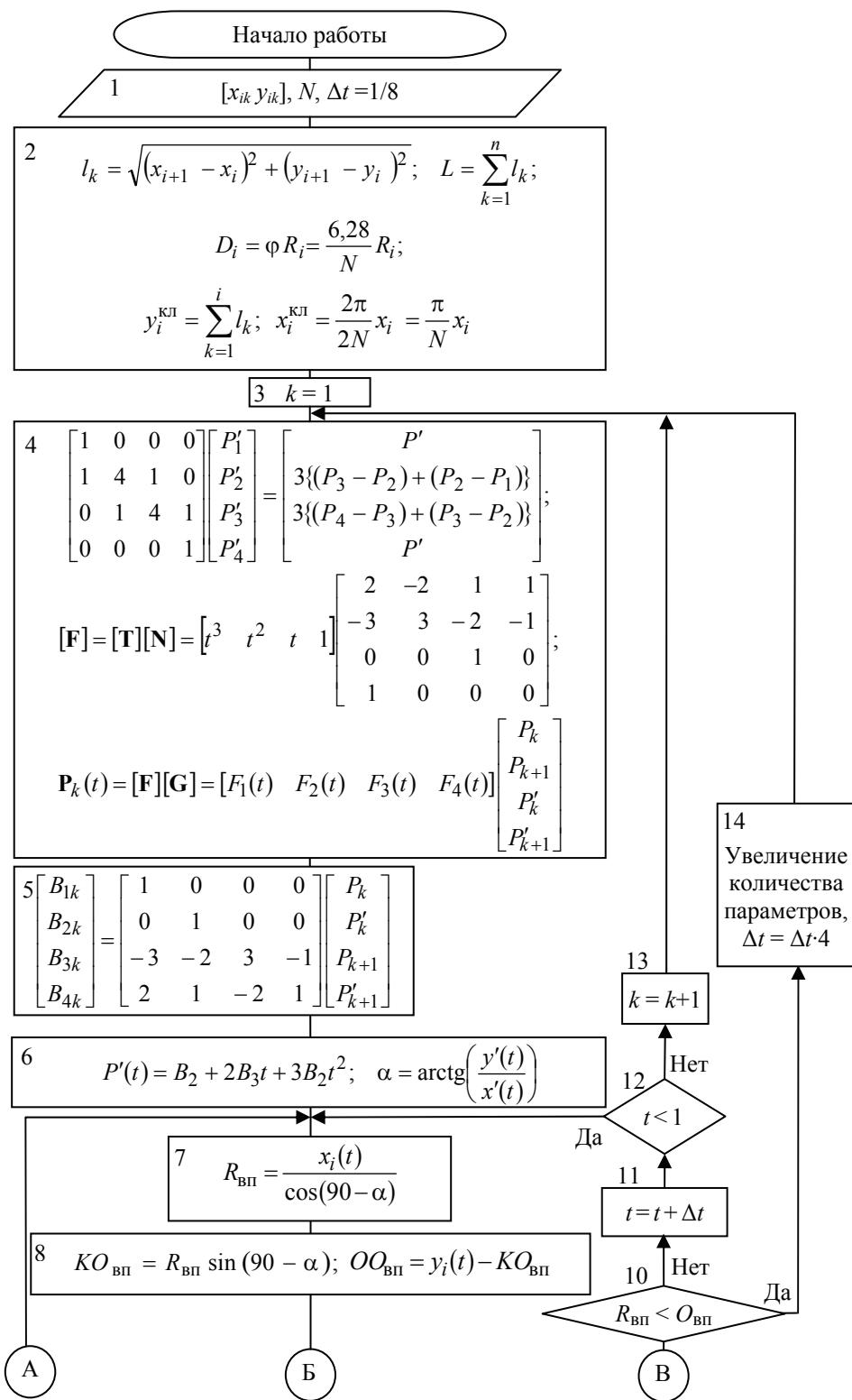


Рис. 7. Алгоритм вписывания матричных элементов в виде кругов в контур клина (начало)

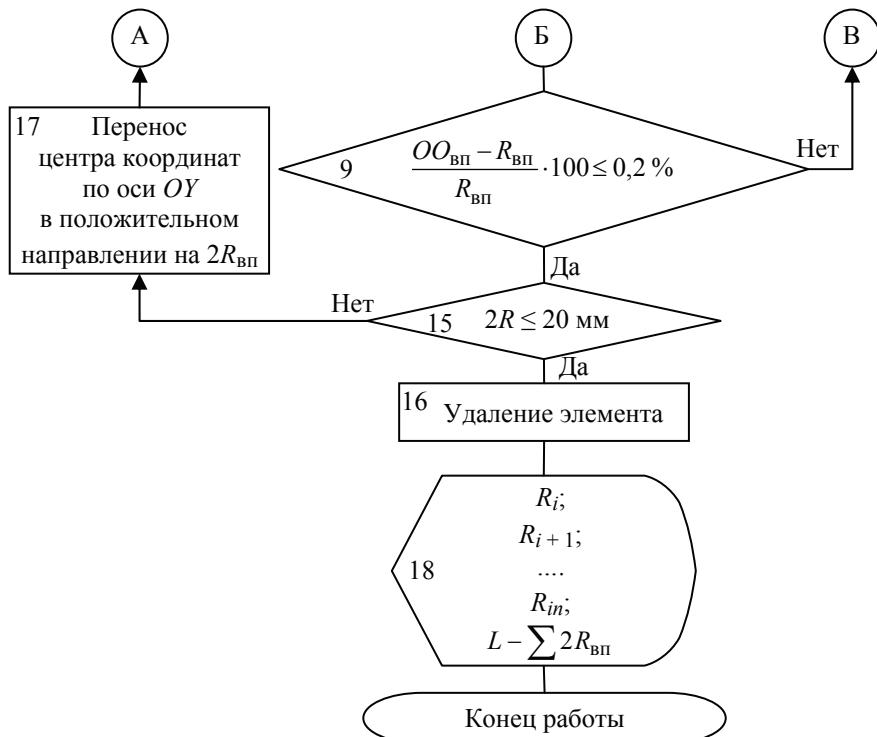


Рис. 7. Продолжение

Если доля погрешности больше 0,2 % (блоки 9–10) и $R_{\text{вп}} > OO_{\text{вп}}$, то происходит переход к следующей точке сегмента (блоки 10–12), и повторяются расчеты (блоки 7–9), или к следующему сегменту (блоки 10–13), и повторяются расчеты (блоки 4–9). При $R_{\text{вп}} < OO_{\text{вп}}$ увеличивается количество разбиений на соответствующем участке сплайна (блок 14), то есть увеличивается количество параметров t для расчета дополнительных точек, и снова производятся расчеты (блоки 4–9).

Если размер элемента менее 20 мм (блоки 15–16), данный элемент удаляется, и на экране отображаются результаты вычислений (блок 18), а именно, радиусы всех вписанных в контур клина окружностей и расстояние от верхней точки последней вписанной окружности до наивысшей точки клина.

Заключение

Разработанная методика проектирования объемных поверхностей из матричных элементов позволяет использовать ценные отходы и низкосортные кожевенно-меховые полуфабрикаты, а также расширить ассортимент головных уборов из кожи и меха.

Список литературы

- Каграманова, И.Н. Рациональное использование натурального меха на швейных предприятиях. Технологические процессы в сервисе : учеб. пособие. – М. : ИНФА-М, Форум, 2006. – 160 с.
- Пат. 2229254 Российская Федерация, МПК А 41 D 27/08. Способ изготовления двустороннего объемного ажурного полотна изделия из кожи и (или) меха / Свириденко О.В., Андросова Г.М. ; заявитель и патентообладатель Омск. гос. ин-т

сервиса. – № 2003101184/12 ; заявл. 16.01.2003 ; опубл. 27.05.2004, Бюл. № 15. – 5 с.

3. Пат. 51992 Российская Федерация, МПКО 02–05. Косынка (2 варианта) / Свириденко О.В., Андросова Г.М., Шнякина Е.Н. ; заявитель и патентообладатель Омск. гос. ин-т сервиса. – № 2001501090 ; заявл. 09.06.2001 ; опубл. 16.03.2003, Бюл. № 3. – 4 с.

4. Пат. 2355269 Российская Федерация, С1. Способ изготовления головного убора из кожи и меха / Касумова М.Ю., Кубаева С.В., Андросова Г.М. ; заявитель и патентообладатель Омск. гос. ин-т сервиса. – № 2007133342/12 ; заявл. 05.09.2007 ; опубл. 20.05.2009, Бюл. №14. – 12 с.

5. Роджерс, Д. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс ; пер. с англ. П.А. Монахова, Г.В. Олохтоновой, Д.В. Волкова ; под ред. Ю.М. Баяковского, В.А. Галактионова, В.В. Мартынюка. – М. : Мир, 2001. – 604 с.

Application of Cubic Spline for Designing Headwear from Matrix Elements

G.M. Androsova¹, I.G. Brailov², S.V. Cherepanova¹, E.V. Bakhturina¹

*Department "Garment Technology", Omsk State Institute of Service (1);
svetlanakubaeva@rambler.ru;*

*Department "Applied Mechanics", Siberian State Automobile
and Highway Academy (2)*

Key words and phrases: cam profile; matrix element; sculpted surfaces; standard cubic spline.

Abstract: The paper studies the designing of sculpted surfaces from matrix elements on the example of headwear. The construction of involute of the surface is carried out; its profile with cubic spline is described; matrix elements are framed in its profile. The algorithm for designing headwear from matrix elements is developed.

Anwendung von kubischen Splinen bei der Projektierung der Kopfbedeckung aus den Matrixelementen

Zusammenfassung: Es wird die Projektierung der Volumenoberfläche aus der Matrixelementen am Beispiel von der Kopfbedeckung betrachtet. Es wird die Struktur der Abtastung der Oberfläche, die Beschreibung ihrer Kontur vom kubischen Spline, die Einstellung in ihre Kontur der Matrixelemente verwirklicht. Es ist den Algorithmus der Projektierung der Kopfbedeckung aus den Matrixelementen erarbeitet.

Usage des splines cubique lors de la conception du couvre-chef à partir des éléments matriciels

Résumé: Est envisagée la conception des surfaces volumineuses à partir des éléments matriciels à l'exemple du couvre-chef. Est réalisée la construction de l'exploration de la surface, la description de son contour par un spline cubique, l'inscription dans son contour des éléments matriciels. Est élaboré l'algorithme de la conception du couvre-chef à partir des éléments matriciels.

Авторы: *Андросова Галина Михайловна* – кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры «Технология швейных изделий», ГОУ ВПО «Омский государственный институт сервиса»; *Браилов Иван Григорьевич* – доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика», ГОУ ВПО «Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия»; *Черепанова Светлана Вахитовна, Бахтурсина Елена Вячеславовна* – аспиранты кафедры «Технология швейных изделий», ГОУ ВПО «Омский государственный институт сервиса».

Рецензент: *Абдулин Султан Файзрахманович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Автоматизация производственных процессов и электротехника», ГОУ ВПО «Сибирская автомобильно-дорожная академия».
