

УДК 539.3

## ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ОБОЛОЧКИ

Г.М. Куликов<sup>1</sup>, С.В. Плотникова<sup>1</sup>, В.П. Ярцев<sup>2</sup>

*Кафедры: «Прикладная математика и механика» (1),  
«Конструкции зданий и сооружений» (2), ГОУ ВПО «ТГТУ»;  
kulikov@apmath.tstu.ru*

**Ключевые слова и фразы:** вариационное уравнение Ху-Васидзу; многослойная композитная оболочка; термопьезоэлектричество.

**Аннотация:** Рассмотрены два функционала для исследования стационарных задач линейной термоэлектрoупругости для многослойных композитных оболочек. На основе деформационных соотношений 7-параметрической модели оболочки с учетом поперечного нормального деформирования и гипотезы о линейном распределении температуры и потенциала электрического поля в пределах пьезоэлектрического слоя получены вариационные уравнения связанной задачи термопьезоэлектричества.

---

### 1. Введение

В 1974 г. Миндлин [1] впервые получил уравнения линейной термоэлектрoупругости для расчета пластин, однако лишь спустя двадцать лет были разработаны конечные элементы для расчета термоэлектрoупругих пластин и оболочек [2, 3]. Результаты дальнейших исследований в этом направлении представлены в статьях [4–7]. Общим для всех этих работ является использование принципа виртуальных перемещений для получения конечноэлементных уравнений, что исключает возможность построения смешанных и гибридных элементов оболочки.

Как известно, смешанные и гибридные конечные элементы обладают рядом преимуществ по сравнению с конечными элементами в форме метода перемещений, так как они не подвержены сдвиговому и мембранному запирающим и не допускают ложных жестких смещений (механизмов). Однако для построения этих элементов оболочки требуется применение смешанного вариационного принципа Хеллингера–Рейсснера или более общего вариационного принципа Ху-Васидзу [8]. Таким образом, возникает актуальная задача обобщения смешанного вариационного принципа Ху-Васидзу с целью его использования в стационарных задачах термопьезоэлектричества.

В данной работе получено смешанное вариационное уравнение Ху-Васидзу для термоэлектрoупругих оболочек на основе 7-параметрической модели оболоч-

ки [9]. Это вариационное уравнение открывает путь для разработки перспективных геометрически точных элементов термоэлектроупругой оболочки. Термин «геометрически точный элемент» означает, что отсчетная поверхность оболочки описывается аналитически заданными функциями, в частности сплайнами. При этом векторы перемещений представляются в локальном базисе, связанном с отсчетной поверхностью оболочки [10–12].

## 2. Функционалы пространственной теории термоэлектроупругости

Рассмотрим смешанный функционал для исследования стационарных задач линейной термоэлектроупругости, обобщающий смешанный функционал [13] путем включения в него напряжений и деформаций в качестве независимых переменных:

$$\begin{aligned} \Pi_1^{3D} = & \iiint_V \left[ H + ST - \sigma_{ij} \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} \right) + D_i (E_i + \varphi_{,i}) - \right. \\ & \left. - X_i u_i + Q_V \varphi \right] dV - \iint_{\Omega_\sigma} p_i u_i d\Omega - \iint_{\Omega_D} Q_S \varphi d\Omega; \\ H = & \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j - \frac{c_\varepsilon}{2T_0} \Theta^2 - e_{kij} E_k \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} \varepsilon_{ij} \Theta - g_i E_i \Theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $H$  – электрическая энтальпия;  $D_i$  – компоненты вектора смещения электрического поля;  $E_i$  – компоненты вектора напряженности электрического поля;  $S$  – энтропия;  $\varphi$  – электрический потенциал;  $u_i$  – компоненты вектора перемещений;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\Theta = T - T_0$  – прирост температуры от естественного состояния;  $T_0$  – температура естественного состояния по шкале Кельвина;  $c_{ijkl}$  – компоненты тензора упругих постоянных;  $e_{kij}$  – компоненты тензора пьезоэлектрических постоянных;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора диэлектрических постоянных;  $\gamma_{ij}$  – компоненты тензора температурных напряжений;  $g_i$  – компоненты вектора пироэлектрических постоянных;  $c_\varepsilon$  – теплоемкость при постоянной деформации;  $X_i$  – компоненты вектора массовых сил;  $p_i$  – компоненты вектора поверхностных сил, действующих на поверхности  $\Omega_\sigma$ ;  $Q_V$  – объемная плотность электрических зарядов;  $Q_S$  – поверхностная плотность электрических зарядов на поверхности  $\Omega_D$ . При этом  $\Omega = \Omega_\sigma + \Omega_u$  и  $\Omega = \Omega_D + \Omega_\varphi$ , где  $\Omega_u$  – поверхность, на которой заданы перемещения;  $\Omega_\varphi$  – поверхность, на которой задан электрический потенциал. Отметим также, что естественное состояние характеризуется отсутствием деформаций и напряжений и все величины измерены в изотермическом состоянии.

Варьируя  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $D_i$ ,  $E_i$ ,  $\varphi$ ,  $\Theta$  и используя теорему Остроградского–Гаусса, из вариационного уравнения Ху-Васидзу

$$\delta \Pi_1^{3D} = 0$$

находим уравнения равновесия тела, уравнения электростатики, уравнения состояния и граничные условия:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k - \gamma_{ij} \Theta \quad \text{в } V; \quad (2)$$

$$D_i = e_{ikm} \varepsilon_{km} + \varepsilon_{ik} E_k + g_i \Theta \quad \text{в } V; \quad (3)$$

$$S = \gamma_{km} \varepsilon_{km} + g_k E_k + \frac{c \varepsilon}{T_0} \Theta \quad \text{в } V; \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{в } V; \quad (5)$$

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad \text{в } V; \quad (6)$$

$$E_i = -\varphi_{,i} \quad \text{в } V; \quad (7)$$

$$D_{i,i} = Q_V \quad \text{в } V; \quad (8)$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \quad \text{на } \Omega_\sigma; \quad (9)$$

$$u_i = \tilde{u}_i \quad \text{на } \Omega_u, \quad \text{где } \delta u_i = 0; \quad (10)$$

$$D_i n_i = Q_S \quad \text{на } \Omega_D; \quad (11)$$

$$\varphi = \tilde{\varphi} \quad \text{на } \Omega_\varphi, \quad \text{где } \delta \varphi = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим также второй функционал, приведенный в монографии [13],

$$\Pi_2^{3D} = \iiint_V \left( \frac{1}{2} \lambda_{ij} T_{,i} T_{,j} - w T \right) dV + \iint_{\Omega_q} \tilde{q}_i n_i T d\Omega, \quad (13)$$

где  $\lambda_{ij}$  – компоненты тензора теплопроводности;  $w$  – интенсивность внутренних источников тепла;  $\tilde{q}_i$  – компоненты вектора теплового потока через поверхность  $\Omega_q$ ;  $n_i$  – компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности  $\Omega_q$ . Варьируя температуру и пользуясь теоремой Остроградского–Гаусса, из вариационного уравнения

$$\delta \Pi_2^{3D} = 0,$$

с учетом закона Фурье  $q_i = -\lambda_{ij} T_{,j}$ , получим уравнение теплопроводности и граничные условия:

$$\lambda_{ij} T_{,ij} = -w \quad \text{в } V; \quad (14)$$

$$q_i = \tilde{q}_i \quad \text{на } \Omega_q; \quad (15)$$

$$T = \tilde{T} \quad \text{на } \Omega_T, \quad \text{где } \delta T = 0, \quad (16)$$

где  $\Omega = \Omega_q + \Omega_T$ .

Уменьшим в функционале  $\Pi_1^{3D}$  число независимых переменных, приняв  $E_i = -\varphi_{,i}$ , и рассмотрим для определенности пьезоэлектрический кристалл моноклинной системы класса 2 при наличии двукратной оси симметрии параллельной оси  $x_3$  [13]. В этом случае функционалы (1), (13) можно представить в матричной форме:

$$\Pi_1^{3D} = \iiint_V \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{c} \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} - \frac{c_\varepsilon}{2T_0} \Theta^2 - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{e}^T \mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\gamma} \Theta - \right. \\ \left. - \mathbf{E}^T \mathbf{g} \Theta + ST - \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{u}^T \mathbf{X} + Q_V \varphi \right] dV - \iint_{\Omega_\sigma} \mathbf{u}^T \mathbf{p} d\Omega - \iint_{\Omega_D} Q_S \varphi d\Omega; \quad (17)$$

$$\Pi_2^{3D} = \iiint_V \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\mathcal{T}}^T \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\mathcal{T}} - wT \right) dV + \iint_{\Omega_q} \tilde{q}_i n_i T d\Omega. \quad (18)$$

Здесь обозначено:

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T, \quad \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [u_{1,1} \ u_{2,2} \ u_{3,3} \ u_{1,2} + u_{2,1} \ u_{1,3} + u_{3,1} \ u_{2,3} + u_{3,2}]^T, \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23}]^T, \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23}]^T,$$

$$\mathbf{E} = [-\varphi_{,1} \ -\varphi_{,2} \ -\varphi_{,3}]^T, \quad \boldsymbol{\mathcal{T}} = [T_{,1} \ T_{,2} \ T_{,3}]^T, \quad \mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T,$$

$$\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ p_3]^T, \quad \boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{11} \ \gamma_{22} \ \gamma_{33} \ \gamma_{12} \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{g} = [0 \ 0 \ g_3]^T,$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & 0 & 0 \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & 0 & 0 \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} & 0 & 0 \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & c_{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{2313} & c_{2323} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{311} \\ 0 & 0 & e_{322} \\ 0 & 0 & e_{333} \\ 0 & 0 & e_{312} \\ e_{113} & e_{213} & 0 \\ e_{123} & e_{223} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{u}$  – столбец перемещений;  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – столбцы зависимых и независимых от перемещений деформаций;  $\boldsymbol{\sigma}$  – столбец напряжений;  $\mathbf{E}$  – столбец напряженности электрического поля;  $\boldsymbol{\mathcal{T}}$  – столбец градиента температурного поля;  $\mathbf{X}$  – столбец массовых сил;  $\mathbf{p}$  – столбец поверхностных нагрузок;  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\mathbf{g}$  – матрицы и столбцы термопьезоупругих постоянных.

### 3. Функционалы теории термоэлектроупругих оболочек

Рассмотрим тонкую оболочку толщиной  $h = d^- + d^+$ , составленную из  $N$  анизотропных слоев постоянной толщины  $h_n$ . Будем полагать, что в каждой точке оболочки существует поверхность упругой симметрии, параллельная отсчетной поверхности  $\Omega$ . В качестве отсчетной поверхности примем внутреннюю поверхность какого-либо  $n$ -слоя или поверхность раздела слоев, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Поперечную координату  $\theta_3$  будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к поверхности  $\Omega$  (рис. 1). Пусть  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  – единичные векторы касательных к координатным линиям  $\theta_1$  и  $\theta_2$ ;  $\mathbf{e}_3$  – единичный вектор внешней нормали;  $A_\alpha$  – параметры Ламе;  $k_\alpha$  – главные кривизны;  $d^A$  –

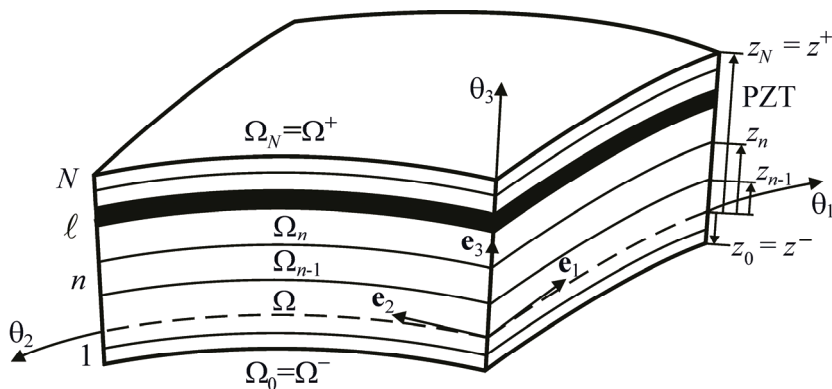


Рис. 1. Многослойная оболочка с внедренным пьезоэлектрическим слоем (PZT)

расстояния от отсчетной поверхности до внешних поверхностей  $\Omega^A$ ;  $z_{n-1}$  и  $z_n$  – поперечные координаты внешних поверхностей  $n$ -слоя  $\Omega_{n-1}$  и  $\Omega_n$ . Здесь и далее индекс слоя  $n = 1, 2, \dots, N$ ; индекс пьезоэлектрического слоя  $\ell = i_1, i_2, \dots, i_L$ , где  $L$  – число пьезоэлектрических слоев в пакете ( $L \leq N$ ); латинские индексы  $i, j, k, m = 1, 2, 3$ ; греческие индексы  $\alpha, \beta = 1, 2$ ; индексы внешних поверхностей  $A, B = -, +$ ; индексы внешних и срединной поверхностей  $I, J = -, M, +$ .

Будем полагать, что тангенциальные перемещения распределены по толщине оболочки согласно линейному закону, а поперечное перемещение – квадратичному [14], то есть

$$u_\alpha = \sum_A N^A u_\alpha^A, \quad u_3 = \sum_I L^I u_3^I, \quad (20)$$

где  $u_\alpha^A(\theta_1, \theta_2)$  и  $u_3^A(\theta_1, \theta_2)$  – тангенциальные и поперечные перемещения внешних поверхностей  $\Omega^A$ ;  $u_3^M(\theta_1, \theta_2)$  – поперечное перемещение срединной поверхности  $\Omega^M$ ;  $N^A(\theta_3)$  и  $L^I(\theta_3)$  – многочлены Лагранжа первой и второй степени, соответственно:

$$N^- = \frac{1}{h}(z^+ - \theta_3), \quad N^+ = \frac{1}{h}(\theta_3 - z^-), \quad (21)$$

$$L^- = N^-(N^- - N^+), \quad L^M = 4N^-N^+, \quad L^+ = N^+(N^+ - N^-),$$

такие что  $L^I(z^J) = 1$  при  $J = I$  и  $L^I(z^J) = 0$  при  $J \neq I$ , где  $z^- = -d^-$ ,  $z^+ = d^+$ ,  $z^M = (z^- + z^+)/2$ .

Деформационные соотношения 7-параметрической модели оболочки [9] имеют вид

$$\widehat{\varepsilon}_{ij} = \sum_A N^A \widehat{\varepsilon}_{ij}^A. \quad (22)$$

Здесь  $\widehat{\varepsilon}_{ij}^A(\theta_1, \theta_2)$  – деформации внешних поверхностей оболочки, определяемые по формулам:

$$2\widehat{\varepsilon}_{\alpha\beta}^A = c_\alpha^A \lambda_{\alpha\beta}^A + c_\beta^A \lambda_{\beta\alpha}^A, \quad 2\widehat{\varepsilon}_{\alpha 3}^A = c_\alpha^A \beta_\alpha^A + \lambda_{3\alpha}^A, \quad \widehat{\varepsilon}_{33}^A = \beta_3^A, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned}
\lambda_{\alpha\alpha}^A &= \left( \frac{1}{A_\alpha} u_\alpha^A \right)_{,\alpha} + B_{\alpha\alpha} u_\alpha^A + B_{\alpha\beta} u_\beta^A + k_\alpha u_3^A \quad (\beta \neq \alpha), \\
\lambda_{\beta\alpha}^A &= \left( \frac{1}{A_\alpha} u_\beta^A \right)_{,\alpha} + B_{\alpha\alpha} u_\beta^A - B_{\alpha\beta} u_\alpha^A \quad (\beta \neq \alpha), \\
\lambda_{3\alpha}^A &= \left( \frac{1}{A_\alpha} u_3^A \right)_{,\alpha} + B_{\alpha\alpha} u_3^A - k_\alpha u_\alpha^A, \\
\beta_i^- &= \frac{1}{h} (-3u_i^- + 4u_i^M - u_i^+), \quad \beta_i^+ = \frac{1}{h} (u_i^- - 4u_i^M + 3u_i^+), \\
u_\alpha^M &= \frac{1}{2} (u_\alpha^- + u_\alpha^+), \quad c_\alpha^A = 1 + k_\alpha z^A, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_\alpha A_\beta} A_{\alpha,\beta}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Деформационные соотношения (22) – (24) весьма привлекательны с точки зрения их использования в методе конечного элемента, поскольку они *точно* представляют произвольные перемещения оболочки как жесткого тела [9, 15]. Другое достоинство этих деформационных соотношений состоит в том, что они позволяют преодолеть так называемое пуассоновское закливание (искусственное завышение жесткости оболочки в поперечном направлении) [16].

Распределение независимых от перемещений деформаций по толщине пакета имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \sum_A N^A \varepsilon_{ij}^A, \tag{25}$$

где  $\varepsilon_{ij}^A(\theta_1, \theta_2)$  – независимо введенные деформации внешних поверхностей оболочки. Как видим, законы распределения зависимых и независимых от перемещений деформаций (22), (25) согласованы друг с другом.

Далее будем полагать, что каждый слой в пакете является пьезоэлектриком, то есть  $L = N$ , и примем гипотезу о линейном распределении потенциала электрического поля по толщине  $\ell$ -го слоя:

$$\begin{aligned}
\varphi_\ell &= \sum_A N_\ell^A \varphi_\ell^A, \quad z_{\ell-1} \leq \theta_3 \leq z_\ell, \\
N_\ell^- &= \frac{1}{h_\ell} (z_\ell - \theta_3), \quad N_\ell^+ = \frac{1}{h_\ell} (\theta_3 - z_{\ell-1}),
\end{aligned} \tag{26}$$

где  $\varphi_\ell^-(\theta_1, \theta_2)$  и  $\varphi_\ell^+(\theta_1, \theta_2)$  – потенциалы электрического поля на нижней и верхней поверхностях  $\Omega_{\ell-1}$  и  $\Omega_\ell$ , при этом согласно условию непрерывности  $\varphi_r^+ = \varphi_{r+1}^-$ , где  $r = 1, 2, \dots, N-1$ .

Для полей температуры и энтропии воспользуемся аналогичными аппроксимациями:

$$T_\ell = \sum_A N_\ell^A T_\ell^A, \quad z_{\ell-1} \leq \theta_3 \leq z_\ell; \tag{27}$$

$$S_\ell = \sum_A N_\ell^A S_\ell^A, \quad z_{\ell-1} \leq \theta_3 \leq z_\ell, \tag{28}$$

где  $T_\ell^A(\theta_1, \theta_2)$  и  $S_\ell^A(\theta_1, \theta_2)$  – значения температуры и энтропии на внешних поверхностях  $\ell$ -го слоя, при этом  $T_r^+ = T_{r+1}^-$  и  $S_r^+ = S_{r+1}^-$ .

Вводя распределения (20), (22), (25) – (28) в трехмерные функционалы (17), (18) и пренебрегая массовыми силами, источниками тепла и свободными электрическими зарядами внутри слоев, получим

$$\begin{aligned} \Pi_1^{2D} = & \iint_{\Omega} \left\{ \sum_{\ell} \sum_{A,B} \left[ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^A)^T \zeta_{\ell}^{AB} \mathbf{c}^{(\ell)} \boldsymbol{\varepsilon}^B - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{(\ell)A})^T \zeta_{\ell}^{AB} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\ell)B} - \right. \right. \\ & - \frac{1}{2T_0} \Theta_{\ell}^A \zeta_{\ell}^{AB} c_{\varepsilon}^{(\ell)} \Theta_{\ell}^B - (\boldsymbol{\varepsilon}^A)^T \eta_{\ell}^{AB} (\mathbf{e}^{(\ell)})^T \mathbf{E}^{(\ell)B} - (\boldsymbol{\varepsilon}^A)^T \eta_{\ell}^{AB} \boldsymbol{\gamma}^{(\ell)} \Theta_{\ell}^B - \\ & \left. - (\mathbf{E}^{(\ell)A})^T \zeta_{\ell}^{AB} \mathbf{g}^{(\ell)} \Theta_{\ell}^B + S_{\ell}^A \zeta_{\ell}^{AB} T_{\ell}^B \right] - \sum_A (\mathbf{H}^A)^T (\boldsymbol{\varepsilon}^A - \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^A) + \\ & \left. + (\mathbf{u}^-)^T \mathbf{p}^- - (\mathbf{u}^+)^T \mathbf{p}^+ - Q_S^- \Phi_1^- - Q_S^+ \Phi_L^+ \right\} A_1^M A_2^M d\theta_1 d\theta_2 - W_{\text{ext}}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\Pi_2^{2D} = \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \sum_{\ell} \sum_{A,B} (\boldsymbol{\varepsilon}^{(\ell)A})^T \zeta_{\ell}^{AB} \boldsymbol{\lambda}^{(\ell)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\ell)B} - \tilde{q}_3^- T_1^- + \tilde{q}_3^+ T_L^+ \right] A_1^M A_2^M d\theta_1 d\theta_2 + \Phi_{\text{ext}}. \quad (30)$$

Здесь,  $\mathbf{c}^{(\ell)}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\ell)}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\ell)}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^{(\ell)}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}^{(\ell)}$ ,  $\mathbf{g}^{(\ell)}$  определяют согласно (19) матрицы и столбцы термопьезоупругих постоянных  $\ell$ -го слоя;  $A_{\alpha}^M = A_{\alpha} (1 + k_{\alpha} z^M)$  – параметры Ламе срединной поверхности;  $W_{\text{ext}}$  – работа внешних поверхностных сил на торцах оболочки;  $\Phi_{\text{ext}}$  – тепловой поток на торцах оболочки;  $Q_S^-$ ,  $Q_S^+$  – поверхностные плотности электрических зарядов на внешних поверхностях оболочки;  $\tilde{q}_3^-$ ,  $\tilde{q}_3^+$  – нормальные компоненты тепловых потоков на внешних поверхностях оболочки;  $\mathbf{u}^A$  – столбцы перемещений внешних поверхностей оболочки;  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^A$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^A$  – столбцы зависимых и независимых от перемещений деформаций внешних поверхностей оболочки;  $\mathbf{E}^{(\ell)A}$  – столбцы напряженности электрического поля на внешних поверхностях  $\ell$ -го слоя;  $\Theta_{\ell}^A = T_{\ell}^A - T_0$  – прирост температуры от естественного состояния на внешних поверхностях  $\ell$ -го слоя;  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\ell)A}$  – столбцы градиента температуры на внешних поверхностях  $\ell$ -го слоя;  $\mathbf{p}^A$  – столбцы внешних поверхностных нагрузок, действующих на внешних поверхностях оболочки;  $\mathbf{H}^A$  – столбцы результирующих напряжений, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^A &= [u_1^A \ u_2^A \ u_3^A]^T, \quad \mathbf{p}^A = [p_1^A \ p_2^A \ p_3^A]^T, \quad (31) \\ \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^A &= [\widehat{\varepsilon}_{11}^A \ \widehat{\varepsilon}_{22}^A \ \widehat{\varepsilon}_{33}^A \ 2\widehat{\varepsilon}_{12}^A \ 2\widehat{\varepsilon}_{13}^A \ 2\widehat{\varepsilon}_{23}^A]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^A = [\varepsilon_{11}^A \ \varepsilon_{22}^A \ \varepsilon_{33}^A \ 2\varepsilon_{12}^A \ 2\varepsilon_{13}^A \ 2\varepsilon_{23}^A]^T, \\ \mathbf{E}^{(\ell)A} &= \left[ -\frac{1}{A_1} \varphi_{\ell,1}^A \ -\frac{1}{A_2} \varphi_{\ell,2}^A \ -\frac{1}{h_{\ell}} (\varphi_{\ell}^+ - \varphi_{\ell}^-) \right]^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(\ell)A} &= \left[ \frac{1}{A_1} T_{\ell,1}^A \ \frac{1}{A_2} T_{\ell,2}^A \ \frac{1}{h_{\ell}} (T_{\ell}^+ - T_{\ell}^-) \right]^T, \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}^A = \sum_{\ell} \int_{z_{\ell-1}}^{z_{\ell}} \boldsymbol{\sigma}^{(\ell)} N^A d\theta_3,$$

$$\mathbf{H}^A = [H_{11}^A \ H_{22}^A \ H_{33}^A \ H_{12}^A \ H_{13}^A \ H_{23}^A]^T, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(\ell)} = [\sigma_{11}^{(\ell)} \ \sigma_{22}^{(\ell)} \ \sigma_{33}^{(\ell)} \ \sigma_{12}^{(\ell)} \ \sigma_{13}^{(\ell)} \ \sigma_{23}^{(\ell)}]^T,$$

$$\xi_{\ell}^{AB} = \int_{z_{\ell-1}}^{z_{\ell}} N^A N^B d\theta_3, \quad \zeta_{\ell}^{AB} = \int_{z_{\ell-1}}^{z_{\ell}} N_{\ell}^A N_{\ell}^B d\theta_3, \quad \eta_{\ell}^{AB} = \int_{z_{\ell-1}}^{z_{\ell}} N^A N_{\ell}^B d\theta_3,$$

где  $\boldsymbol{\sigma}^{(\ell)}$  – столбец напряжений  $\ell$ -го слоя.

*Замечание.* Следуя работам [9, 11] полагаем, что метрики поверхностей параллельных отсчетной поверхности эквивалентны, поэтому в функционалах (29), (30) элемент площади полагается равным  $A_1^M A_2^M d\theta_1 d\theta_2$ .

#### 4. Вариационные уравнения теории термоэлектроупругих оболочек

Варьируя в функционале (29) независимые переменные  $\mathbf{u}^I$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^A$ ,  $\mathbf{H}^A$ ,  $\varphi_{\ell}^A$ ,  $\Theta_{\ell}^A$ , а в функционале (30) температуру  $T_{\ell}^A$ , и учитывая уравнения

$$\delta \Pi_1^{2D} = 0, \quad \delta \Pi_2^{2D} = 0,$$

получим вариационные уравнения 7-параметрической модели термоэлектроупругой оболочки

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\{ \sum_A \left[ \delta(\mathbf{H}^A)^T (\boldsymbol{\varepsilon}^A - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^A) - \delta(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^A)^T \mathbf{H}^A \right] + \right. \\ & + \sum_A \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^A)^T \left[ \mathbf{H}^A - \sum_{\ell} \sum_B \left( \xi_{\ell}^{AB} \mathbf{c}^{(\ell)} \boldsymbol{\varepsilon}^B - \eta_{\ell}^{AB} (\mathbf{e}^{(\ell)})^T \mathbf{E}^{(\ell)B} - \eta_{\ell}^{AB} \boldsymbol{\gamma}^{(\ell)} \Theta_{\ell}^B \right) \right] + \\ & + \sum_{\ell} \sum_{A,B} \delta(\mathbf{e}^{(\ell)A})^T \left[ \eta_{\ell}^{AB} \mathbf{e}^{(\ell)} \boldsymbol{\varepsilon}^B + \zeta_{\ell}^{AB} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\ell)} \mathbf{E}^{(\ell)B} + \zeta_{\ell}^{AB} \mathbf{g}^{(\ell)} \Theta_{\ell}^B \right] - \\ & - \sum_{\ell} \sum_{A,B} \delta \Theta_{\ell}^A \left[ \zeta_{\ell}^{AB} S_{\ell}^A - \eta_{\ell}^{AB} (\boldsymbol{\gamma}^{(\ell)})^T \boldsymbol{\varepsilon}^B - \zeta_{\ell}^{AB} (\mathbf{g}^{(\ell)})^T \mathbf{E}^{(\ell)B} - \frac{1}{T_0} c_{\varepsilon}^{(\ell)} \zeta_{\ell}^{AB} \Theta_{\ell}^B \right] - \\ & \left. - \delta(\mathbf{u}^-)^T \mathbf{p}^- + \delta(\mathbf{u}^+)^T \mathbf{p}^+ + Q_S^- \delta \varphi_1^- + Q_S^+ \delta \varphi_1^+ \right\} A_1^M A_2^M d\theta_1 d\theta_2 + \delta W_{\text{ext}} = 0; \quad (32) \end{aligned}$$

$$\iint_{\Omega} \left[ \sum_{\ell} \sum_{A,B} \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^{(\ell)A})^T \zeta_{\ell}^{AB} \boldsymbol{\lambda}^{(\ell)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\ell)B} - \tilde{q}_3^- \delta T_1^- + \tilde{q}_3^+ \delta T_L^+ \right] A_1^M A_2^M d\theta_1 d\theta_2 + \delta \Phi_{\text{ext}} = 0. \quad (33)$$

Вариационные уравнения (32), (33) могут служить основой для разработки перспективных геометрически точных конечных элементов термоэлектроупругих многослойных композитных оболочек.



*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 2.1.1/660).*

#### *Список литературы*

1. Mindlin, R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates / R.D. Mindlin // *International Journal of Solids and Structures*. – 1974. – Vol. 10, № 6. – P. 625–637.
2. Jonnalagadda, K.D. Piezothermoelastic composite plate analysis using first-order shear deformation theory / K.D. Jonnalagadda, G.E. Blandford, T.R. Tauchert // *Computers & Structures*. – 1994. – Vol. 51, № 1. – P. 79–89.
3. Tzou, H.S. Piezothermoelasticity and precision control of piezoelectric systems: theory and finite element analysis / H.S. Tzou, R. Ye // *Journal of Vibration and Acoustics*. – 1994. – Vol. 116, № 4. – P. 489–495.
4. Lee, H.-J. Generalized finite element formulation for smart multilayered thermal piezoelectric composite plates / H.-J. Lee, D.A. Saravanos // *International Journal of Solids and Structures*. – 1997. – Vol. 34, № 26. – P. 3355–3371.
5. Lee, H.-J. A mixed multi-field finite element formulation for thermopiezoelectric composite shells / H.-J. Lee, D.A. Saravanos // *International Journal of Solids and Structures*. – 2000. – Vol. 37, № 36. – P. 4949–4967.
6. Oh, J. A finite element based on cubic zig-zag plate theory for the prediction of thermo-electric-mechanical behaviors / J. Oh, M. Cho // *International Journal of Solids and Structures*. – 2004. – Vol. 41, № 5–6. – P. 1357–1375.
7. Kumar, R. Static and dynamic analysis of smart cylindrical shell / R. Kumar, B.K. Mishra, S.C. Jain // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2008. – Vol. 45, № 1. – P. 13–24.
8. Washizu, K. *Variational methods in elasticity and plasticity*, 3rd edition / K. Washizu – Oxford : Pergamon Press, 1982. – 542 p.
9. Kulikov, G.M. Finite rotation geometrically exact four-node solid-shell element with seven displacement degrees of freedom / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. – 2008. – Vol. 28, № 1. – P. 15–38.
10. Kulikov, G.M. Simple and effective elements based upon Timoshenko-Mindlin shell theory / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2002. – Vol. 191, № 11–12. – P. 1173–1187.
11. Kulikov, G.M. Geometrically exact assumed stress-strain multilayered solid-shell elements based on the 3D analytical integration / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Computers & Structures*. – 2006. – Vol. 84, № 19–20. – P. 1275–1287.
12. Kulikov, G.M. Geometrically exact four-node piezoelectric solid-shell element / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2008. – Vol. 15, № 3–4. – P. 199–207.
13. Новацкий, В. *Электромагнитные эффекты в твердых телах* / В. Новацкий. – М. : Мир, 1986. – 160 с.
14. Kulikov, G.M. Refined global approximation theory of multilayered plates and shells / G.M. Kulikov // *Journal of Engineering Mechanics*. – 2001. – Vol. 127, № 2. – P. 119–125.
15. Kulikov, G.M. On the first-order seven-parameter plate theory / G.M. Kulikov // *Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та*. – 2007. – Т. 13, № 2Б. – С. 518–528.
16. Bischoff, M. Models and finite elements for thin-walled structures / M. Bischoff, W.A. Wall, K.U. Bletzinger, E. Ramm // E. Stein, R. de Borst, T. J. R. Hughes (eds) *Encyclopedia of Computational Mechanics*. Vol. 2: Solids and Structures. – Wiley, 2004. – P. 59–137.

## Variational Equations of Thermoelastoelectricity for Multilayered Composite Shell

G.M. Kulikov<sup>1</sup>, S.V. Plotnikova<sup>1</sup>, V.P. Yartsev<sup>2</sup>

Departments: "Applied Mathematics and Mechanics" (1),  
"Construction of Buildings and Structures" (2), TSTU;  
kulikov@apmath.tstu.ru

**Key words and phrases:** Hu-Washizu variational equation; multilayered composite shell; thermopiezoelectricity.

**Abstract:** Two functionals for stationary problems of thermoelastoelectricity for multilayered composite shells are considered. Based on the strain-displacement relationships of the 7-parameter shell model accounting for a transverse normal strain and a hypothesis concerning the linear distribution of temperature and electric potential throughout the piezoelectric layer, the variational equations of a coupled problem of thermopiezoelectricity have been obtained.

---

## Variationsgleichungen der Thermoelastoelectricität für die vielschichtigen Kompositenhülle

**Zusammenfassung:** Es sind zwei Funktionale für die Untersuchung der Stationäraufgaben der linearen Thermoelastoelectricität für die vielschichtigen Kompositenhüllen betrachtet. Auf Grund der Deformationsverhältnisse des 7-Parametermodells der Hülle mit Rücksicht auf die normale Querdeformierung und der Hypothese über die lineare Temperaturverteilung und des Potentials des elektrischen Feldes innerhalb der piezoelektrischen Schicht sind die Variationsgleichungen der gebundenen Aufgabe der Thermoelastoelectricität erhalten.

---

## Equations de variation de l'élasticité électrique et thermique pour une enveloppe multicouche composite

**Résumé:** Sont examinées deux fonctionnelles pour l'étude des problèmes stationnaires de l'élasticité électrique et thermique linéaire pour les enveloppes multicouches composites. A la base des relations de déformation du modèle à 7 paramètres de l'enveloppe et compte tenu de la déformation normale transversale et l'hypothèse de la répartition linéaire de la température et du potentiel du champ électrique dans une gamme de la couche piézoélectrique sont reçues les équations de variation du problème couplé de la piézoélectricité.

---

**Авторы:** *Куликов Геннадий Михайлович* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и механика»; *Плотникова Светлана Валерьевна* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и механика»; *Ярцев Виктор Петрович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Конструкции зданий и сооружений», ГОУ ВПО «ТГТУ».

**Рецензент:** *Коновалов Виктор Иванович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Химическая инженерия», ГОУ ВПО «ТГТУ».