

УДК 532.517.2

**ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ  
В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ОДНОНАПРАВЛЕННО  
ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПЕРФОРИРОВАННЫМИ ДИСКАМИ  
ПРИ ОТСУТСТВИИ РАДИАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ**

**А.А. Коптев<sup>1</sup>, В.М. Червяков<sup>2</sup>**

*Кафедры: «Техника и технологии машиностроительных производств» (1),  
«Теория машин, механизмов и детали машин» (2), ГОУ ВПО «ТГТУ»;  
postmaster@kma.tstu.ru*

*Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым*

**Ключевые слова и фразы:** безразмерные переменные; обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения; уравнения Навье–Стокса.

**Аннотация:** Рассмотрено решение уравнений Навье–Стокса в цилиндрической системе координат в случае перфорированных дисков, вращающихся с одинаковыми скоростями в одном направлении. Показана неоднозначность решений при радиальном градиенте давления, равном нулю. При решении использована подстановка замены переменных по уравнениям Т. Кармана.

**Обозначения**

$A, B$ – постоянные интегрирования;	$u$ – радиальная скорость, м/с;
$a, b$ – постоянные в конце интервала интегрирования;	$w$ – осевая скорость, м/с;
$C$ – коэффициент давления;	$z$ – осевая координата;
$G$ – безразмерная окружная скорость;	$z_0$ – расстояние между дисками, м;
$G', G''$ – производные окружной скорости;	$\varepsilon$ – безразмерная осевая координата;
$H$ – безразмерная осевая скорость;	$\varepsilon_0$ – безразмерное расстояние между дисками;
$H'$ – безразмерная радиальная скорость;	$\mathcal{Q}$ – окружная скорость, м/с;
$H'', H'''$ – производные осевой (радиальной) скорости;	$\rho$ – плотность жидкости, кг/м <sup>3</sup> ;
$P$ – безразмерное давление;	$\nu$ – кинематическая вязкость жидкости, м <sup>2</sup> /с;
$P'$ – производная безразмерного давления;	$\varphi$ – окружная координата, рад;
$p$ – давление, Н/м <sup>2</sup> ;	$\omega$ – угловая скорость диска, с <sup>-1</sup> .
$r$ – радиальная координата, м;	

Рассматриваем течение жидкости между двумя перфорированными дисками, вращающимися с равными угловыми скоростями  $\omega$  (рис. 1). Диски погружены в жидкость. Объем жидкости, подаваемый через один диск, равен объему отсасываемой через другой диск. Считаем, что жидкость вязкая, несжимаемая, ньютоновская, движение в зазоре между дисками ламинарное, так как расстояние между

дисками мало  $z_0 < 4$  мм, стационарное. На рис. 1 показано расположение осей системы координат.

При данных условиях можно использовать уравнения Навье–Стокса в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . В связи с осесимметричностью задачи производные по окружной координате  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ . Тогда уравнения Навье–Стокса принимают вид

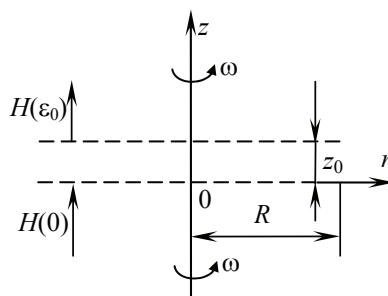


Рис. 1. Схема движения жидкости

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\vartheta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]; \\ u \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{u\vartheta}{r} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \nu \left[ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\vartheta}{r^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right]; \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{cases} \quad (1)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Приведем систему дифференциальных уравнений (1) к безразмерному виду подстановкой, аналогичной подстановке Т. Кармана [1]:

$$\begin{cases} u = \omega r H'(\varepsilon); \\ \vartheta = \omega r G(\varepsilon); \\ w = -2\sqrt{\omega \nu} H(\varepsilon); \\ p = C \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - 2\rho \omega \nu P(\varepsilon), \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\varepsilon = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}; \quad \varepsilon_0 = z_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}.$$

Таким образом, мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} H''' = C + (H')^2 - G^2 - 2HH''; \\ G'' = 2(H'G - HG'); \\ P' = H'' + 2HH', \end{cases} \quad (4)$$

где штрихами обозначены производные по  $\varepsilon$ . Уравнение неразрывности (2) удовлетворяется тождественно. Третье уравнение системы (4) можно проинтегрировать

$$P - P(0) = H' + H^2, \quad (5)$$

где  $P(0)$  – давление на поверхности диска при  $\varepsilon = 0$ .

Граничные условия для решения системы уравнений (1):

$$u = 0, \quad \vartheta = \omega r, \quad w = w_0 \quad \text{при } z = 0;$$

$$u = 0, \quad \vartheta = \omega r, \quad w = w_0 \quad \text{при } z = z_0;$$

для решения системы уравнений (4):

$$H'(0) = 0, \quad G(0) = 1, \quad H = H(0) \quad \text{при } \varepsilon = 0;$$

$$H'(\varepsilon_0) = 0, \quad G(\varepsilon_0) = 1, \quad H(\varepsilon_0) = H(0) \quad \text{при } \varepsilon = \varepsilon_0.$$

Совместное численное решение первых двух уравнений системы (4) при градиенте давления  $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$ , или, что то же  $C = 0$ , привело к трем вариантам решения.

Причиной, что решение не единственное, является нелинейность системы дифференциальных уравнений (4).

В графическом изображении начальные параметры решений  $H(0) = H(\varepsilon_0)$ ,  $A = H''(0)$ ,  $B = G'(0)$ ,  $a = H''(\varepsilon_0)$ ,  $b = G'(\varepsilon_0)$  имеют С-образную форму в функции от  $\varepsilon_0$ , иногда отклоняясь по виду. Для обозначения решений им даны названия:

– симметричное, когда функции безразмерных скоростей радиальной  $H'(\varepsilon)$  и окружной  $G(\varepsilon)$  симметричны относительно срединной поверхности  $\varepsilon_{0/2}$ ;

– асимметричные, асимметрия-1 и асимметрия-2, когда функции безразмерных скоростей и их производные по  $\varepsilon$  не имеют симметрии вообще.

Интервалы существования решений зависят от безразмерного расстояния между дисками  $\varepsilon_0 = z_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ :

– симметрия  $\varepsilon_0 \geq 11,602487$ ;

– асимметрия-1  $\varepsilon_0 \geq 8,720027$ ;

– асимметрия-2  $\varepsilon_0 \geq 19,062782$ .

Значения начальных параметров, полученных интегрированием системы дифференциальных уравнений, вследствие громоздкости массива данных опускаем из данной публикации.

Для иллюстрации приведены частные случаи решений. В каждом из трех функций начальных параметров: симметрия, асимметрия-1, асимметрия-2, встречаются такие значения безразмерного расстояния между дисками  $\varepsilon_0 = z_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ , когда начальные параметры  $H(0) = H(\varepsilon_0)$  становятся равными нулю,  $H(0) = H(\varepsilon_0) = 0$ :

– симметрия  $\varepsilon_0 = 14,659446$ ;

– асимметрия-1  $\varepsilon_0 = 18,647388$ ;

– асимметрия-2  $\varepsilon_0 = 36,526140$ .

Результаты решений представлены в табл. 1–3 и изображены графически на рис. 2–5. Функция безразмерного давления  $P$  рассчитана по третьему уравнению системы (4)

$$P - P(0) = H' + H^2.$$

Таблица 1

Решение при  $H(0) = H(\varepsilon_0) = 0$ ,  $H'(0) = 0$ ,  $G(0) = G(\varepsilon_0) = 1$ ,  
 $H'(\varepsilon_0) = 0$ ,  $C = 0$ ,  $\varepsilon_0 = 14,659446$  (симметрия)

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$G$	$G'$	$P - P_0$
0,0	0,000000	0,000000	0,503179	1,000000	-0,601475	0,000000
0,2	0,008808	0,082189	0,326216	0,880888	-0,584521	0,082267
0,4	0,030805	0,133267	0,190952	0,767738	-0,544219	0,134216
0,6	0,060555	0,160895	0,090572	0,663956	-0,492438	0,164562
0,8	0,094023	0,171380	0,018465	0,571005	-0,436927	0,180220
1,0	0,128303	0,169765	-0,031354	0,489109	-0,382494	0,186227
1,2	0,161386	0,159977	-0,064057	0,417749	-0,331886	0,186022
1,4	0,191949	0,144995	-0,083943	0,356008	-0,286452	0,181839
1,6	0,219186	0,127022	-0,094479	0,302792	-0,246639	0,175064
1,8	0,242665	0,107643	-0,098390	0,256984	-0,212333	0,166529
2,0	0,262224	0,087967	-0,097761	0,217520	-0,183114	0,156729
2,2	0,277882	0,068737	-0,094157	0,183437	-0,158409	0,145955
2,4	0,289780	0,050426	-0,088721	0,153896	-0,137607	0,134399
2,6	0,298133	0,033315	-0,082272	0,128175	-0,120109	0,122198
2,8	0,303196	0,017546	-0,075381	0,105668	-0,105373	0,109474
3,0	0,305244	0,003166	-0,068434	0,085873	-0,092919	0,096340
3,2	0,304554	-0,009841	-0,061681	0,068376	-0,082340	0,082913
3,4	0,301396	-0,021530	-0,055276	0,052836	-0,073292	0,069310
3,6	0,296025	-0,031980	-0,049304	0,038976	-0,065493	0,055651
4,0	0,279582	-0,049534	-0,038787	0,015437	-0,052755	0,028632
4,4	0,256908	-0,063259	-0,030131	-0,003591	-0,042751	0,002743
4,8	0,229391	-0,073859	-0,023121	-0,019007	-0,034580	-0,021238
5,2	0,198157	-0,081937	-0,017474	-0,031420	-0,027656	-0,042671
5,6	0,164112	-0,087982	-0,012909	-0,041245	-0,021587	-0,061049
6,0	0,127991	-0,092375	-0,009172	-0,048768	-0,016108	-0,075930
6,4	0,090394	-0,095400	-0,006037	-0,054184	-0,011026	-0,090394
6,8	0,051826	-0,097258	-0,003304	-0,057623	-0,006199	-0,094572
7,2	0,012727	-0,098073	-0,000794	-0,059162	-0,001509	-0,097911
$\varepsilon_0/2$	0,000000	-0,099065	0,000000	-0,059828	0,000000	-0,099065
7,6	-0,026501	-0,097901	0,001662	-0,058835	0,003148	-0,097198
8,0	-0,065461	-0,096729	0,004230	-0,056634	0,007874	-0,092444
8,4	-0,103740	-0,094479	0,007083	-0,052512	0,012776	-0,083717
8,8	-0,140880	-0,091000	0,010406	-0,046373	0,017979	-0,071153
9,2	-0,176346	-0,086064	0,014407	-0,038068	0,023641	-0,054966
9,6	-0,209495	-0,079353	0,019321	-0,027371	0,029975	-0,035465
10,0	-0,239536	-0,070450	0,025414	-0,013959	0,037284	-0,013072
10,4	-0,265492	-0,058826	0,032972	0,002645	0,046019	0,011660
10,8	-0,286150	-0,043841	0,042264	0,023135	0,056861	0,038041
11,2	-0,300019	-0,024761	0,053453	0,048552	0,070855	0,065250
11,4	-0,303861	-0,013449	0,059736	0,063566	0,079505	0,078882
11,6	-0,305313	-0,000841	0,066398	0,080449	0,089596	0,092374
11,8	-0,304107	0,013127	0,073309	0,099522	0,101452	0,105608
12,0	-0,299969	0,028484	0,080250	0,121174	0,115464	0,118466
12,2	-0,292622	0,045206	0,086880	0,145881	0,132086	0,130834
12,4	-0,281803	0,063182	0,092690	0,174217	0,151846	0,142595
12,6	-0,267281	0,082179	0,096942	0,206868	0,175327	0,153618
12,8	-0,248890	0,101787	0,098597	0,244637	0,203141	0,163733
13,0	-0,226569	0,121350	0,096228	0,288453	0,235882	0,172684
13,2	-0,200418	0,139882	0,087915	0,339351	0,274028	0,180050
13,4	-0,170778	0,155953	0,071134	0,398441	0,317807	0,185118
13,6	-0,138332	0,167558	0,042652	0,466834	0,366969	0,186694
13,8	-0,104233	0,171966	-0,001580	0,545521	0,420479	0,182831
14,0	-0,070265	0,165551	-0,066471	0,635168	0,476063	0,170488
14,2	-0,039044	0,143618	-0,157780	0,735816	0,529610	0,145142
14,4	-0,014244	0,100248	-0,281962	0,846433	0,574351	0,100451
14,6	-0,000855	0,028187	-0,445832	0,964281	0,599786	0,028188
$\varepsilon_0$	0,000000	0,000000	-0,503179	1,000000	0,601475	0,000000

Таблица 2

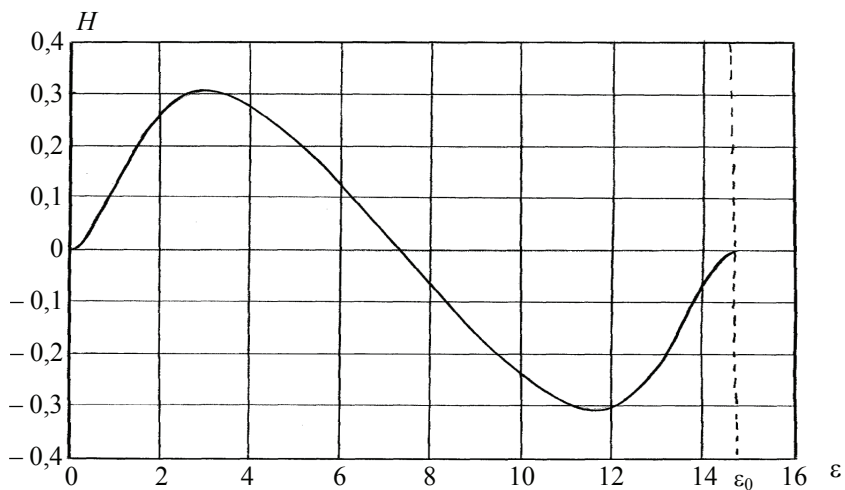
Решение при  $H(0) = H(\varepsilon_0) = 0$ ,  $H'(0) = 0$ ,  $G(0) = G(\varepsilon_0) = 1$ ,  
 $H'(\varepsilon_0) = 0$ ,  $C = 0$ ,  $\varepsilon_0 = 18,647388$  (асимметрия-1)

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$G$	$H''$	$G'$	$P - P_0$
0,0	0,000000	0,000000	0,496297	1,000000	-0,688004	0,000000
0,2	0,008682	0,081029	0,322500	0,863558	-0,671387	0,081104
0,4	0,030420	0,132126	0,195572	0,732944	-0,632076	0,133051
0,6	0,060109	0,161816	0,107031	0,611468	-0,581505	0,165429
0,8	0,094179	0,176953	0,048739	0,500615	-0,526748	0,185822
1,0	0,130276	0,182836	0,013352	0,400766	-0,471971	0,199808
1,2	0,166961	0,183397	-0,005449	0,311671	-0,419484	0,211273
1,4	0,203467	0,181413	-0,012876	0,232739	0,370480	0,222811
1,6	0,239481	0,178727	-0,013061	0,163209	-0,325517	0,236079
1,8	0,274987	0,176460	-0,009145	0,102248	-0,284816	0,252078
2,0	0,310133	0,175189	-0,003405	0,048996	-0,248422	0,271372
2,2	0,345143	0,175114	0,002603	0,002595	-0,216286	0,294238
2,4	0,380255	0,176182	0,007894	-0,037795	-0,188291	0,320776
2,8	0,451574	0,180852	0,014464	-0,103751	-0,143984	0,384771
3,2	0,525125	0,186958	0,015147	-0,154823	-0,113461	0,462717
3,6	0,601040	0,192332	0,011071	-0,195991	-0,093958	0,553581
4,0	0,678683	0,195404	0,003906	-0,231046	-0,082387	0,656015
4,8	0,834375	0,191354	-0,014536	-0,292054	-0,071882	0,887536
5,6	0,980715	0,171886	-0,034083	-0,347071	-0,065508	1,133688
6,4	1,105301	0,137112	-0,052553	-0,395969	-0,055941	1,358802
7,2	1,196387	0,088475	-0,068488	-0,435188	-0,041227	1,519817
8,0	1,243861	0,028629	-0,080311	-0,460607	-0,021567	1,575818
8,8	1,240237	-0,038513	-0,086487	-0,468658	0,001967	1,499675
9,6	1,181631	-0,107906	-0,085761	-0,456847	0,027788	1,288346
10,0	1,131681	-0,141632	-0,082537	-0,443097	0,040957	1,139069
10,8	0,993076	-0,203222	-0,070104	-0,400000	0,066481	0,782977
11,6	0,810026	-0,251692	-0,049792	-0,337505	0,089093	0,404450
12,4	0,595496	-0,280958	-0,022255	-0,258776	0,106754	0,073557
13,2	0,367044	-0,285698	0,011273	-0,168430	0,117957	-0,150977
14,0	0,146034	-0,261782	0,049062	-0,071870	0,122398	-0,240456
14,4	0,045773	-0,238205	0,068881	-0,022831	0,122644	-0,236110
14,8	-0,043466	-0,206656	0,088855	0,026183	0,122436	-0,204766
15,2	-0,118492	-0,167168	0,108469	0,075221	0,123034	-0,153127
15,6	-0,176179	-0,120037	0,126888	0,124986	0,126487	-0,088998
16,0	-0,213599	-0,066013	0,142593	0,177207	0,135957	-0,020389
16,2	-0,223907	-0,036867	0,148607	0,205185	0,144316	0,013268
16,4	-0,228278	-0,006699	0,152697	0,235156	0,156007	0,045412
16,6	-0,226549	0,024033	0,154094	0,267863	0,171818	0,075358
16,8	-0,218669	0,054691	0,151756	0,304213	0,192573	0,102507
17,0	-0,204735	0,084394	0,144288	0,345275	0,219065	0,126311
17,2	-0,185054	0,111943	0,129856	0,392265	0,251941	0,146188
17,4	-0,160209	0,135716	0,106084	0,446500	0,291526	0,161382
17,6	-0,131162	0,153554	0,069953	0,509308	0,337575	0,170758
17,8	-0,099370	0,162625	0,017721	0,581887	0,388933	0,172500
18,0	-0,066938	0,159270	-0,055133	0,665071	0,443073	0,163750
18,2	-0,036797	0,138847	-0,153888	0,759008	0,495507	0,140201
18,4	-0,012918	0,095596	-0,284428	0,862687	0,539018	0,095763
18,6	-0,000543	0,022545	-0,452910	0,973303	0,562670	0,022546
$\varepsilon_0$	0,000000	0,000000	-0,499043	1,000000	0,563746	0,000000

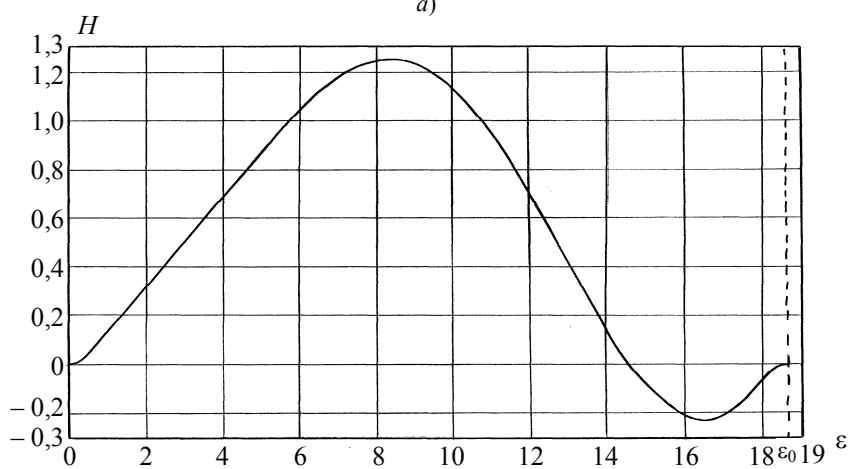
Таблица 3

Решение при  $H(0) = H(\varepsilon_0) = 0$ ,  $H'(0) = 0$ ,  $G(0) = G(\varepsilon_0) = 1$ ,  
 $H'(\varepsilon_0) = 0$ ,  $C = 0$ ,  $\varepsilon_0 = 36,526140$  (асимметрия-2)

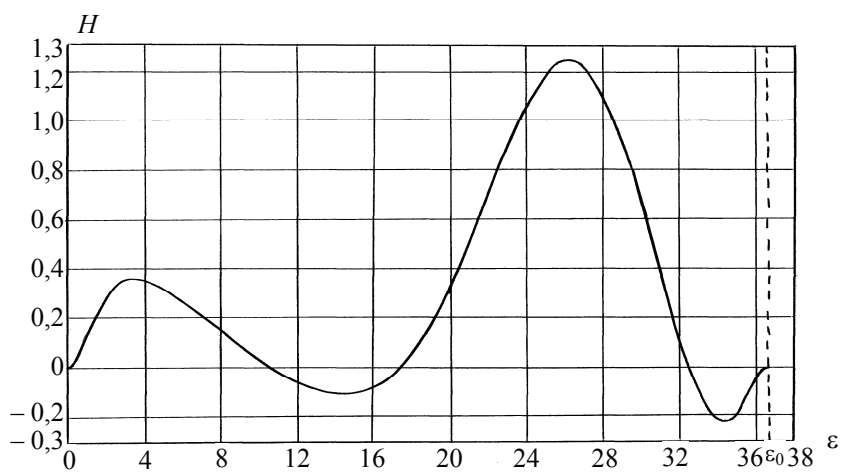
$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$G$	$G'$	$P - P_0$
0,0	0,000000	0,000000	0,513257	1,000000	-0,603683	0,000000
0,2	0,009010	0,084210	0,336376	0,880470	-0,586343	0,084292
0,4	0,031615	0,137339	0,201312	0,767053	-0,544958	0,138339
0,6	0,062389	0,167064	0,101182	0,663282	-0,491501	0,170956
0,8	0,097304	0,179694	0,029308	0,570726	-0,433847	0,189162
1,0	0,133465	0,180265	-0,020358	0,489689	-0,376941	0,198078
1,2	0,168868	0,172682	-0,053027	0,419704	-0,323677	0,201199
1,4	0,202193	0,159897	-0,073022	0,359874	-0,275553	0,200779
1,6	0,232627	0,144085	-0,083817	0,309100	-0,233148	0,198200
1,8	0,259730	0,126802	-0,088126	0,266232	-0,196466	0,194261
2,0	0,283322	0,109128	-0,088020	0,230155	-0,165169	0,189399
2,4	0,320089	0,075229	-0,080297	0,174369	-0,116620	0,177686
2,8	0,344060	0,045420	-0,068470	0,134880	-0,082931	0,163797
3,2	0,357080	0,020490	-0,056299	0,106607	-0,059909	0,147996
3,6	0,361074	0,000214	-0,045343	0,085972	-0,044273	0,130589
4,0	0,357791	-0,016010	-0,036060	0,070524	-0,033644	0,112005
4,8	0,335077	-0,038934	-0,022201	0,049130	-0,021335	0,073342
5,6	0,297904	-0,052777	-0,013023	0,034764	-0,015248	0,035970
6,4	0,252243	-0,060547	-0,006780	0,024006	-0,011950	0,003080
7,2	0,202149	-0,064093	-0,002310	0,015309	-0,009933	-0,023229
8,0	0,150520	-0,064526	0,001088	0,007955	-0,008520	-0,041870
8,8	0,099554	-0,062524	0,003834	0,001598	-0,007406	-0,052613
9,6	0,051021	-0,058496	0,006187	-0,003937	-0,006452	-0,055893
10,4	0,006436	-0,052682	0,008323	-0,008754	-0,005607	-0,052641
11,2	-0,032827	-0,045202	0,010373	-0,012936	-0,004866	-0,044125
12,0	-0,065451	-0,036079	0,012450	-0,016577	-0,004265	-0,031795
12,8	-0,090099	-0,025248	0,014658	-0,019817	-0,003879	-0,017130
13,6	-0,105353	-0,012563	0,017100	-0,022874	-0,003835	-0,001464
14,4	-0,109647	0,002198	0,019863	-0,026096	-0,004331	0,014221
15,2	-0,101208	0,019314	0,022989	-0,030021	-0,005647	0,029558
16,0	-0,078040	0,039063	0,026417	-0,035447	-0,008149	0,045154
16,8	-0,037961	0,061597	0,029889	-0,043486	-0,012250	0,063038
17,6	0,021220	0,086753	0,032851	-0,055568	-0,018300	0,087203
18,4	0,101351	0,113785	0,034405	-0,073318	-0,026406	0,124058
19,2	0,203366	0,141120	0,033407	-0,098279	-0,036220	0,182478
20,0	0,326565	0,166259	0,028759	-0,131481	-0,046806	0,272904
20,8	0,467939	0,185984	0,019823	-0,172990	-0,056715	0,404950
21,6	0,621774	0,196855	0,006713	-0,221599	-0,064278	0,583459
22,0	0,700849	0,197991	-0,001160	-0,247827	-0,066686	0,689180
22,4	0,779728	0,195838	-0,009701	-0,274796	-0,067959	0,803815
22,8	0,857050	0,190167	-0,018719	-0,302026	-0,067970	0,924701
23,2	0,931372	0,180827	-0,028005	-0,328991	-0,066624	1,048282
23,6	1,001214	0,167756	-0,037340	-0,355136	-0,063858	1,170185



a)

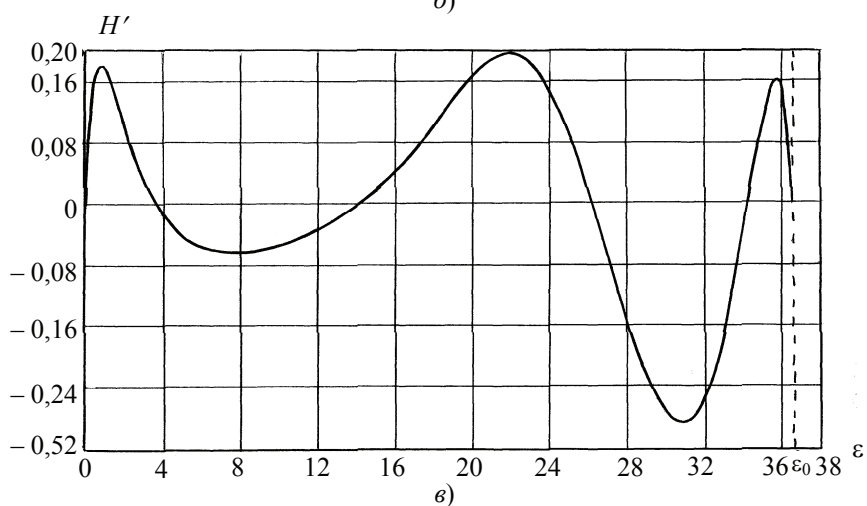
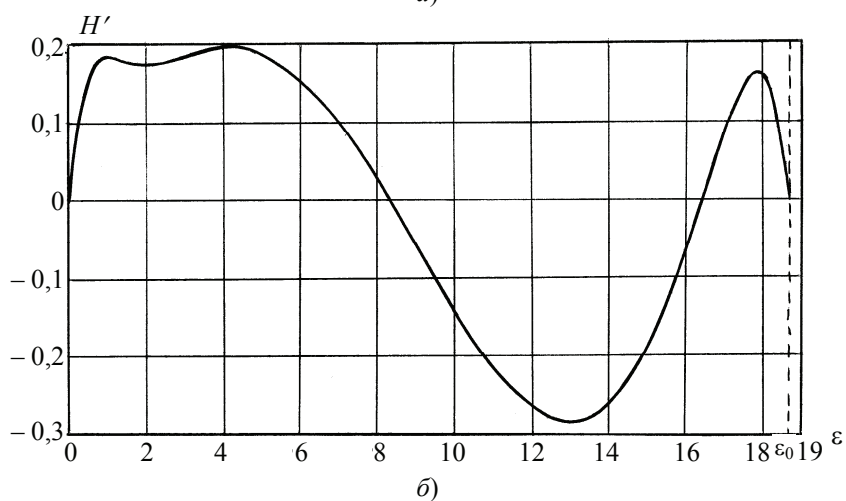
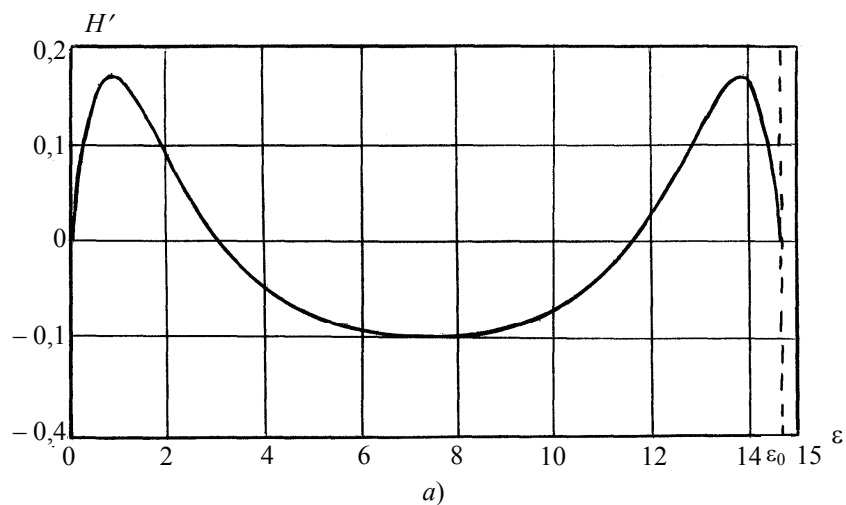


б)



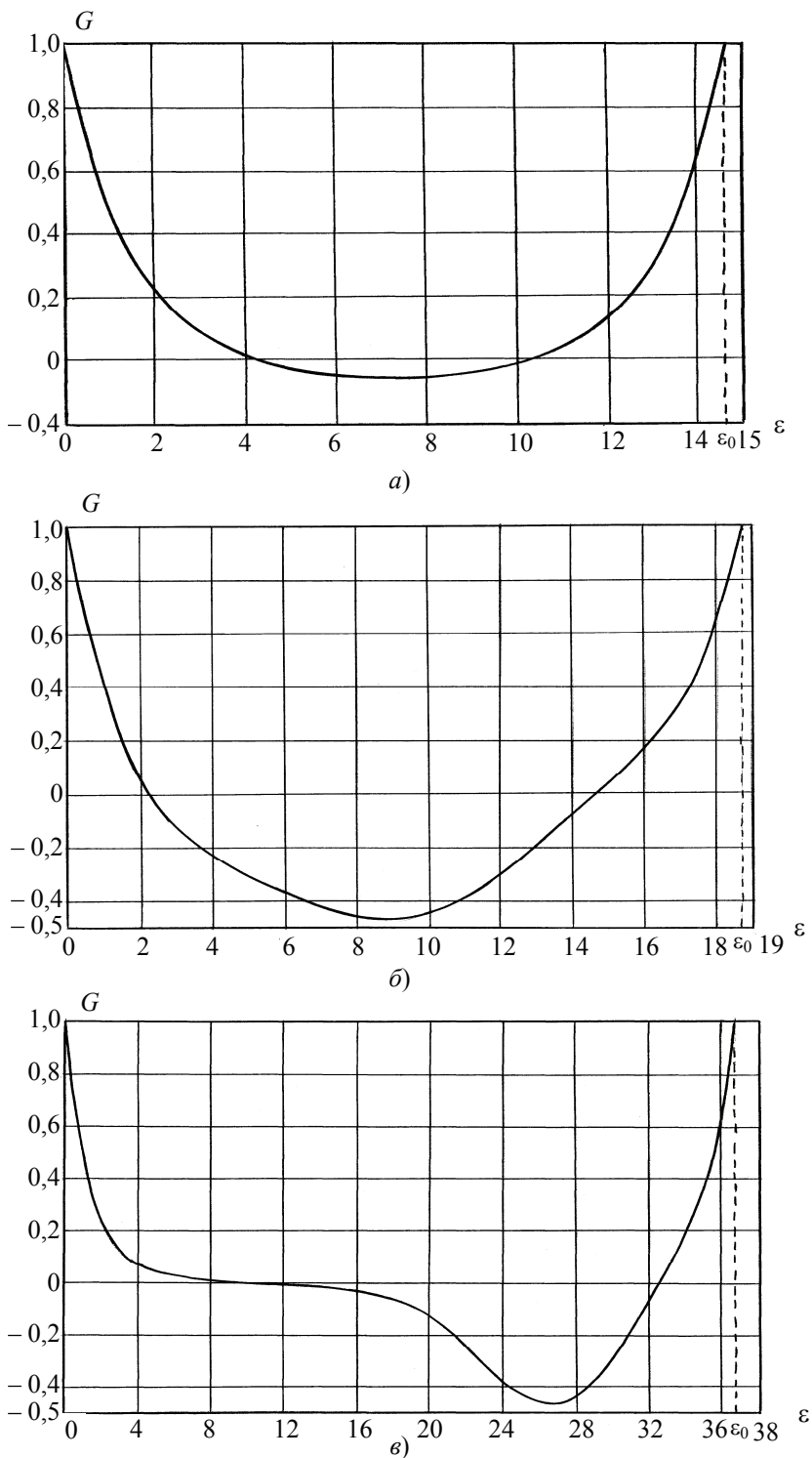
в)

**Рис. 2. Зависимость безразмерной осевой скорости  $H$  от безразмерной осевой координаты  $\varepsilon$  при  $C = 0$ ,  $H(0) = H(\varepsilon_0) = 0$ ,  $G(0) = G(\varepsilon_0) = 1$ :  
 $a - \varepsilon_0 = 14,659446$  (симметрия);  $б - \varepsilon_0 = 18,647388$  (асимметрия-1);  
 $в - \varepsilon_0 = 36,526140$  (асимметрия-2)**

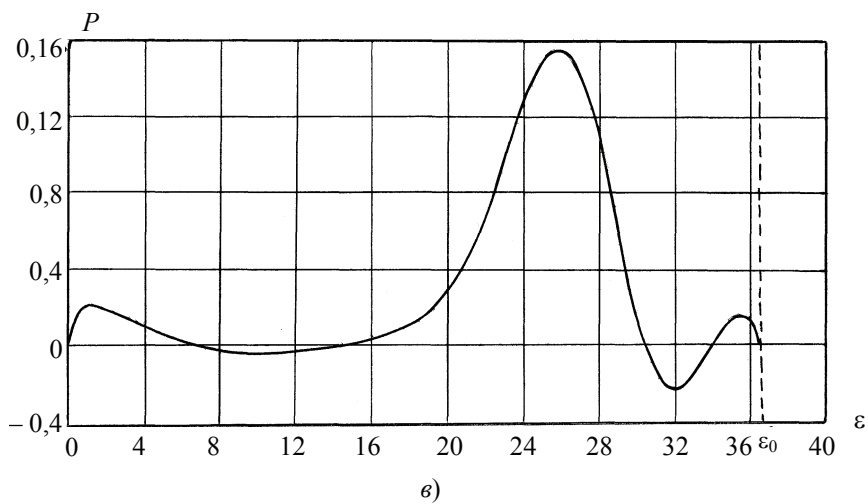
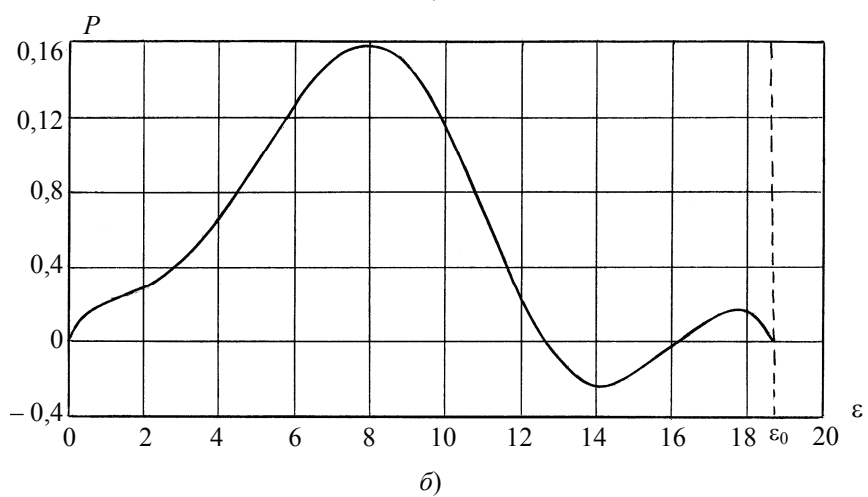
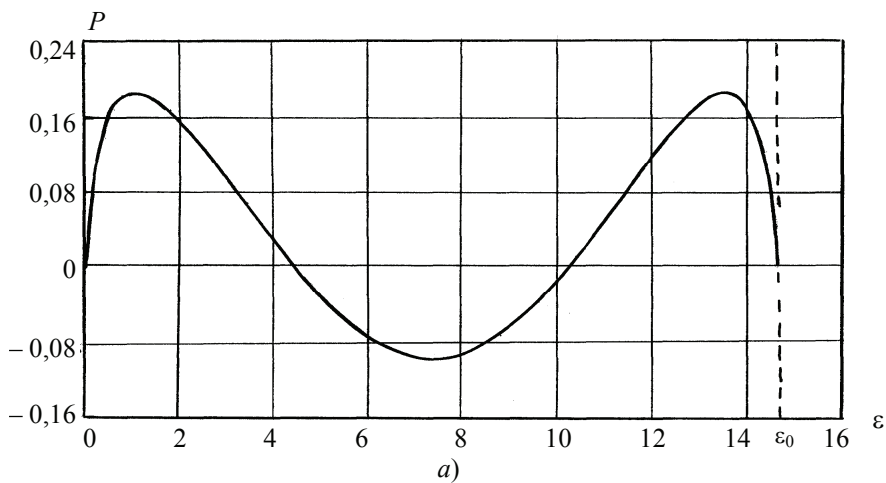


**Рис. 3. Зависимость безразмерной радиальной скорости  $H'$  от безразмерной осевой координаты  $\varepsilon$  при  $C = 0$ ,  $H(0) = H(\varepsilon_0) = 0$ ,  $G(0) = G(\varepsilon_0) = 1$ :**  
 $a - \varepsilon_0 = 14,659446$  (симметрия);  $b - \varepsilon_0 = 18,647388$  (асимметрия-1);  
 $v - \varepsilon_0 = 36,526140$  (асимметрия-2)





**Рис. 4. Зависимость окружной безразмерной скорости  $G$  от безразмерной осевой координаты  $\varepsilon$  при  $C = 0$ ,  $H(0) = H(\varepsilon_0) = 0$ ,  $G(0) = G(\varepsilon_0) = 1$ :**  
 $a - \varepsilon_0 = 14,659446$  (симметрия);  $b - \varepsilon_0 = 18,647388$  (асимметрия-1);  
 $v - \varepsilon_0 = 36,526140$  (асимметрия-2)



**Рис. 5. Зависимость безразмерного давления  $P$  от безразмерной осевой координаты  $\varepsilon$  при  $C = 0, H(0) = H(\varepsilon_0) = 0, G(0) = G(\varepsilon_0) = 1$ :**  
 $a - \varepsilon_0 = 14,659446$  (симметрия);  $b - \varepsilon_0 = 18,647388$  (асимметрия-1);  
 $v - \varepsilon_0 = 36,526140$  (асимметрия-2)

На рис. 3, а; 4, а; 5, а видны симметричные относительно ординаты  $\varepsilon_{0/2}$  картины функций безразмерных радиальной и окружной скоростей  $H'$  и  $G$ , а также безразмерного давления  $P$ . Функции асимметричных решений имеют более сложный характер. Следует отметить, что окружная безразмерная скорость  $G$  на отдельных интервалах осевой безразмерной координаты  $\varepsilon$  имеет отрицательное значение. Значит, жидкость в некоторых удалениях от поверхностей вращающихся дисков, в ядре течения, во всех трех случаях решений вращается в противоположном направлении. Априори это предположить было нельзя. Теоретические расчеты показывают, что это факт.

Радиальное течение в зазоре между дисками может быть названо радиальной циркуляцией. Из граничных условий рассматриваемой задачи следует, что объем жидкости, вытекающий в пограничных к поверхностям дисков слоях вследствие сил трения и, как результат, центробежных сил, равен объему подсоса к оси вращения в ядре течения между дисками.

Объем жидкости, вытекающий в радиальном направлении вблизи вращающегося диска радиуса  $R$ ,

$$Q_r = 2\pi R \int_0^{z^*} u dz = 2\pi R \int_0^{\varepsilon^*} R \omega H' \sqrt{\frac{v}{\omega}} a \varepsilon = 2\pi R^2 \sqrt{\omega v} H_{\max}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon^*$  – координата,  $\varepsilon^* = z^* \sqrt{\frac{\omega}{v}}$ ;  $u = 0$ ;  $H' = 0$ ;  $H = H_{\max}$ .

Такое количество жидкости вытекает вблизи другого диска в случае симметричного течения. Тогда суммарная циркуляция  $Q_S$ , м<sup>3</sup>/с,

$$Q_S = 4\pi R^2 \sqrt{\omega v} H_{\max}. \quad (7)$$

В случае решения асимметрия-1 величина суммарной циркуляции складывается из двух различных объемов вытекающей жидкости вблизи дисков. Суммарное значение циркуляции при этом

$$Q_{S1} = 2\pi R^2 \sqrt{\omega v} (H_{\max 1} + H_{\max 2}), \quad (8)$$

где  $H_{\max 1}$ ,  $H_{\max 2}$  – абсолютные величины экстремумов при  $\varepsilon_1^*$  и  $\varepsilon_2^*$ , где функция  $H'$  имеет нулевые значения.

Решение асимметрия-2 имеет два контура радиальной циркуляции согласно табл. 3 и рис. 3, в.

Значение циркуляции первого контура

$$Q_{r1} = 2\pi R^2 \sqrt{\omega v} (H_{\max 1} + H_{\max 2}). \quad (9)$$

Объемная радиальная циркуляция второго контура

$$Q_{r2} = 2\pi R^2 \sqrt{\omega v} (H_{\max 3} + H_{\max 4}). \quad (10)$$

Суммарная циркуляция в случае решения асимметрия-2

$$Q_{S2} = 2\pi R^2 \sqrt{\omega v} (H_{\max 1} + H_{\max 2} + H_{\max 3} + H_{\max 4}). \quad (11)$$

Из табл. 1–3 численно имеем: симметрия –  $H_{\max} = 0,305$ ; асимметрия-1 –  $H_{\max 1} = 1,240$ ;  $H_{\max 2} = 0,228$ ; асимметрия-2 –  $H_{\max 1} = 0,361$ ;  $H_{\max 2} = 0,110$ ;  $H_{\max 3} = 1,247$ ;  $H_{\max 4} = 0,228$ .

Окончательно из выражений (8), (9), (11) суммарные радиальные циркуляции равны:

– симметрия  $Q_S = 3,833R^2\sqrt{\omega v}$  ;

– асимметрия-1  $Q_{S1} = 9,224R^2\sqrt{\omega v}$  ;

– асимметрия-2  $Q_{S2} = 12,221R^2\sqrt{\omega v}$  .

В заключении отметим, что еще раз подтвердилась многозначность решений нелинейных уравнений Навье–Стокса. Найдены варианты течения жидкости в центробежных полях в отсутствии радиального градиента давления, что на первый взгляд нелогично, но такие течения при определенных параметрах существуют.

#### *Список литературы*

1. Karman, Th. Über laminare und turbulente Reibung / Th. Karman // ZAMM. – 1921. – Vol. 1. – P. 233–252.
2. Cochran, W.G. The flow due to a rotating disk / W.G. Cochran // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1934. – Vol. 30. – P. 365–375.
3. Koptev, A.A. Die Flüssigkeitsströmung in den Zentrifugalfeldern unter der Wirkung der sich drehenden Scheiben. Problem von Th. Kármán / A.A. Koptev // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 1995. – Т. 1, № 1–2. – С. 65–74.
4. Koptev, A.A. Die Flüssigkeitsströmung in den Zentrifugalfeldern unter der Wirkung der sich drehenden Scheiben. Blick auf das Karmanproblem aus der Urendlichkeit / A.A. Koptev // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 1996. – Т. 2, № 3. – С. 271–280.
5. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг ; пер. с нем. Г.А. Вольперга под ред. Л.Г. Лойцянского. – М. : Наука, 1969. – 742 с.
6. Коптев, А.А. Движение жидкости в центробежных полях. В 2 ч. Ч. 1. Течение жидкости вблизи вращающегося диска / А.А. Коптев. – М. : Машиностроение-1, 2005. – 240 с.
7. Коптев, А.А. Движение жидкости в центробежных полях. В 2 ч. Ч. 2. Течение жидкости в ограниченном пространстве вблизи вращающегося диска / А.А. Коптев. – М. : Машиностроение-1, 2006. – 300 с.
8. Червяков, В.М. Определение энергозатрат в роторных аппаратах / В.М. Червяков, А.А. Коптев // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 2005. – № 4. – С. 10–12.

---

## **Fluid Flow through Gap between Unidirectional Rotating Disks under Lack of Radial Pressure Gradient**

**A.A. Koptev<sup>1</sup>, V.M. Chervyakov<sup>2</sup>**

*Departments: “Engineering Techniques and Technologies” (1),  
“Theory of Machines, Mechanisms and Machine Elements” (2), TSTU;  
postmaster@kma.tstu.ru*

**Key words and phrases:** Navier–Stokes equations; numerical variables; ordinary non-linear differential equations.

**Abstract:** The paper studies the solution to Navier–Stokes equations in cylindrical coordinate system in case of perforated disks rotating at similar velocity in the same direction. Multiplicity of solutions when radial pressure gradient equals zero is shown. The substitution of variables in T. Karman equations is used in the solution.

## **Strömung der Flüssigkeit in dem Spalt zwischen den einseitig drehbaren Lochscheiben bei der Abwesenheit vom radialen Druckgradient**

**Zusammenfassung:** Es wird die Lösung der Gleichungen von Navye–Stokes im zylindrischen Koordinatensystem im Falle der mit den gleichen Geschwindigkeiten in einer Richtung drehenden Lochscheiben betrachtet. Es ist die Mehrdeutigkeit der Lösungen bei dem radialen Druckgradient, der Null gleich ist, gezeigt. Bei der Lösung wird die Permutation des Variablenersetzens nach den Gleichungen von T. Karman benutzt.

---

## **Ecoulement du liquide dans le jet entre les disques perforées tournant dans une direction lors de l'absence du gradient radial de la pression**

**Résumé:** Est examinée la solution de l'équation de Navier–Stokes dans un système des coordonnées cylindrique dans le cas des disques perforées tournant dans une direction avec les mêmes vitesses. Est montré la non-unicité des solutions avec le gradient radial de la pression égal au zéro. Lors de la solution est utilisée la substitution de la commande biplanétaire du dispositif mêlant pour la solution du changement des variables d'après l'équation de T. Karman.

---

**Авторы:** *Коптев Андрей Алексеевич* – кандидат технических наук, профессор кафедры «Техника и технологии машиностроительных производств»; *Червяков Виктор Михайлович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Теория машин, механизмов и детали машин», ГОУ ВПО «ТГТУ».

**Рецензент:** *Ткачев Алексей Григорьевич* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Техника и технологии машиностроительных производств», ГОУ ВПО «ТГТУ».

---