

УДК 539.3

РАСЧЕТ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ НАКЛАДКАМИ

С.В. Плотникова, М.Г. Куликов

*Кафедра «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ»;
kulikov@apmath.tstu.ru*

Представлена членом редколлегии профессором Г.М. Куликовым

Ключевые слова и фразы: композитная оболочка; метод конечных элементов; пьезоэлектрик.

Аннотация: На основе теории оболочек с учетом поперечного обжатия предложена математическая модель, описывающая электроупругое состояние многослойных анизотропных оболочек с пьезоэлектрическими накладками. Разработан смешанный геометрически точный пьезоэлектрический элемент оболочки. Приведены численные примеры, подтверждающие состоятельность предложенной модели. Проведен анализ влияния размера пьезоэлектрических накладок на перемещения многослойных композитных пластин и оболочек.

Введение

В последнее время предложены различные методы расчета электроупругого состояния тонкостенных конструкций с сегментированными пьезоэлектрическими слоями, внедренными в основной материал или закрепленными на поверхностях конструкции [1–4]. Такие конструкции являются технологичными и позволяют эффективно управлять их деформациями. При создании алгоритма расчета подобных конструкций решающее значение имеет быстрота получаемого компьютерного кода, что позволяет осуществлять управление в режиме реального времени. Разработанный в работе [5] на базе [6, 7] геометрически точный элемент оболочки GEXP4 превосходит по скорости расчета аналогичные пьезоэлектрические элементы, так как использует трехмерное аналитическое интегрирование, не требует численного обращения матриц и позволяет использовать редкие конечно-элементные сетки.

Существенной особенностью элемента GEXP4 является использование в качестве независимых переменных перемещений, деформаций, результирующих напряжений и электрических потенциалов на лицевых поверхностях оболочки. Однако для конструкций с накладками при таком выборе переменных перемещения на лицевых поверхностях оказываются разрывными, что не позволяет применять стандартную процедуру сборки элементов в ансамбль. Отсюда следует необходимость адаптации элемента GEXP4 для расчета конструкций с переменной толщиной.

Описание кинематики оболочки и электрического поля в пьезоэлектрике

Рассмотрим оболочку, представляющую собой композитную основу с наклеенными на лицевых поверхностях накладками из пьезоэлектрического материала. На отсчетной поверхности S выбираем криволинейную ортогональную систему координат α_1, α_2 , оси которой совпадают с линиями главных кривизн поверхности; \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 – единичные векторы, направленные вдоль координатных осей. Пусть \mathbf{e}_3 – единичный вектор, направленный по нормали к отсчетной поверхности; α_3 – координатная ось в направлении \mathbf{e}_3 ; δ_k – координаты поверхностей раздела k -го и $(k+1)$ -го слоев; h_b и h_t – толщины нижнего и верхнего пьезоэлектрических слоев (рис. 1).

Предположим, что оболочка разбита на два вида элементов: базовые, которые содержат только композитную основу, и пьезоэлектрические, которые наряду с композитной основой содержат пьезоэлектрические слои. Обозначим через N число слоев в базовом элементе. Для простоты изложения предполагаем, что пьезоэлектрические накладки расположены симметрично на обеих лицевых поверхностях основы, хотя это предположение не является принципиальным.

Пусть S^- и S^+ – лицевые поверхности композитной основы элемента; u_i^\pm – перемещения точек поверхностей S^- и S^+ в направлениях координатных осей отсчетной поверхности, где $i=1, 2, 3$. Используя линейную аппроксимацию перемещений по толщине оболочки, получим:

$$u_i = N^- u_i^- + N^+ u_i^+, \quad (1a)$$

$$N^- = \frac{1}{h}(\delta_N - \alpha_3), \quad N^+ = \frac{1}{h}(\alpha_3 - \delta_0), \quad (1b)$$

где h – толщина композитной основы; $\alpha_3 \in [\delta_0 - h_b, \delta_N + h_t]$ – для пьезоэлектрического элемента; $\alpha_3 \in [\delta_0, \delta_N]$ – для базового элемента.

На лицевых поверхностях элемента определены тангенциальные $\epsilon_{\alpha\beta}^\pm$ и поперечные $\epsilon_{\alpha 3}^\pm$ деформации, а также деформация поперечного обжатия $\bar{\epsilon}_{33}$ на отсчетной поверхности [5]:

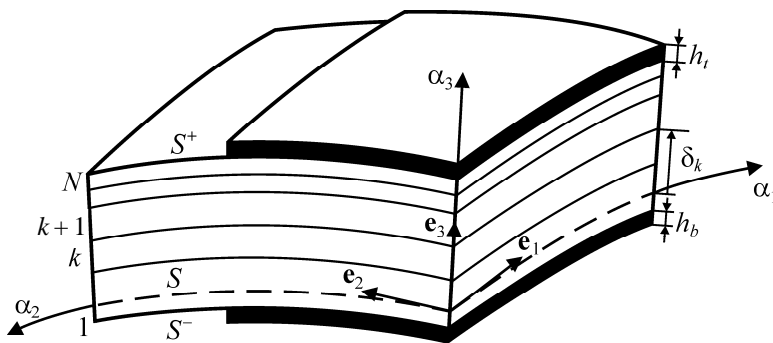


Рис. 1. Композитная оболочка с пьезоэлектрическими накладками

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm} = \zeta_{\alpha}^{\pm}\lambda_{\alpha\beta}^{\pm} + \zeta_{\beta}^{\pm}\lambda_{\beta\alpha}^{\pm}, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3}^{\pm} = \zeta_{\alpha}^{\pm}\beta_{\alpha} - \theta_{\alpha}^{\pm}, \quad \bar{\varepsilon}_{33} = \beta_3, \quad (2a)$$

$$\lambda_{\alpha\alpha}^{\pm} = \left(\frac{1}{A_{\alpha}} u_{\alpha}^{\pm} \right)_{,\alpha} + B_{\alpha\alpha} u_{\alpha}^{\pm} + B_{\alpha\beta} u_{\beta}^{\pm} + k_{\alpha} u_3^{\pm} \quad (\beta \neq \alpha), \quad (2b)$$

$$\lambda_{\beta\alpha}^{\pm} = \left(\frac{1}{A_{\alpha}} u_{\beta}^{\pm} \right)_{,\alpha} + B_{\alpha\alpha} u_{\beta}^{\pm} - B_{\alpha\beta} u_{\alpha}^{\pm} \quad (\beta \neq \alpha),$$

$$\theta_{\alpha}^{\pm} = - \left(\frac{1}{A_{\alpha}} u_3^{\pm} \right)_{,\alpha} - B_{\alpha\alpha} u_3^{\pm} + k_{\alpha} u_{\alpha}^{\pm}, \quad \beta_i = \frac{1}{h} (u_i^+ - u_i^-),$$

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_{\alpha} A_{\beta}} A_{\alpha,\beta}, \quad \zeta_{\alpha}^{\pm} = 1 + k_{\alpha} \delta_{\alpha}^{\pm},$$

где A_{α} и k_{α} – коэффициенты Ламе и главные кривизны отсчетной поверхности; индексы α, β принимают значения 1, 2.

Используем линейную аппроксимацию тангенциальных и поперечных касательных деформаций по толщине оболочки, деформация поперечного обжатия полагается постоянной по толщине:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = N^{-} \varepsilon_{\alpha\beta}^{-} + N^{+} \varepsilon_{\alpha\beta}^{+}, \quad \varepsilon_{\alpha 3} = N^{-} \varepsilon_{\alpha 3}^{-} + N^{+} \varepsilon_{\alpha 3}^{+}, \quad \varepsilon_{33} = \bar{\varepsilon}_{33}. \quad (3)$$

Предполагаем также, что для пьезоэлектрических элементов электрический потенциал $\varphi_l(\alpha_1, \alpha_2)$, где $l = b, t$, имеет линейное распределение по толщине пьезоэлектрического слоя:

$$\varphi_l = N_l^{-} \varphi_l^{-} + N_l^{+} \varphi_l^{+}, \quad (4a)$$

$$N_b^{-} = \frac{1}{h_b} (\delta_0 - \alpha_3), \quad N_b^{+} = \frac{1}{h_b} (\alpha_3 - \delta_0 + h_b), \quad (4b)$$

$$N_t^{-} = \frac{1}{h_t} (\delta_N + h_t - \alpha_3), \quad N_t^{+} = \frac{1}{h_t} (\alpha_3 - \delta_N),$$

где $\varphi_l^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2)$ – значения электрического потенциала на верхней и нижней поверхностях l -го пьезоэлектрического слоя.

Построение матрицы жесткости элемента

При построении матрицы жесткости пьезоэлектрических элементов используем уравнения состояния пьезоэлектростатости [8]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d}^T \mathbf{E}, \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta} \mathbf{E}, \quad (6)$$

$$\mathbf{D} = [D_1 \ D_2 \ D_3]^T, \quad \mathbf{E} = [E_1 \ E_2 \ E_3]^T,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{13} \ \sigma_{12}]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{12}]^T,$$

где \mathbf{D} – вектор смещения электрического поля, \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля; \mathbf{d} – матрица пьезоэлектрических констант; $\boldsymbol{\zeta}$ – матрица диэлек-

трических констант; $\boldsymbol{\sigma}$ – вектор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор деформаций. Рассматриваем здесь пьезоэлектрический слой как моноклинный кристалл (класс 2), обладающий осью второго порядка параллельной оси α_3 . В этом случае матрицы \mathbf{d} и $\boldsymbol{\zeta}$ могут быть записаны в виде

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & 0 \\ & \zeta_{22} & 0 \\ \text{sym.} & & \zeta_{33} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}$ – матрица податливостей материала при постоянном электрическом поле, где \mathbf{C} – матрица упругих констант, имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & A_{16} \\ & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & A_{26} \\ & & A_{33} & 0 & 0 & A_{36} \\ & & & A_{44} & A_{45} & 0 \\ & & & & A_{55} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & A_{66} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Для преодоления Пуассоновского заперения элемента оболочки, возникающего при ненулевых коэффициентах Пуассона, вводится модифицированная матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ [9], которая получается из матрицы \mathbf{A} отбрасыванием подчеркнутых членов. Разрешая далее уравнение (5) относительно напряжений, получим

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E}, \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{d}\tilde{\mathbf{C}}. \quad (10)$$

Электрическое поле \mathbf{E} может быть выражено через потенциал φ как

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (11)$$

Используем билинейную конечноэлементную аппроксимацию перемещений и потенциала электрического поля:

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{v}_r = [u_{1r}^- \ u_{1r}^+ \ u_{2r}^- \ u_{2r}^+ \ u_{3r}^- \ u_{3r}^+]^T, \quad (12a)$$

$$\Phi_l = \sum_r N_r \Phi_{lr}, \quad \Phi_{lr} = [\varphi_{lr}^- \ \varphi_{lr}^+]^T, \quad (12b)$$

где N_r – билинейные функции формы элемента; $r = \overline{1,4}$ – номер узла в элементе. Используя аппроксимации (12), получим конечноэлементный аналог соотношений (2) и (11):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{r_1, r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \mathbf{B}_M^{r_1 r_2} \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\Psi}_l = \sum_{r_1, r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \mathbf{B}_E^{r_1 r_2} \Phi_l, \quad (13)$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1^T \ \mathbf{v}_2^T \ \mathbf{v}_3^T \ \mathbf{v}_4^T]^T, \quad \boldsymbol{\Phi}_l = [\boldsymbol{\varphi}_{l1}^T \ \boldsymbol{\varphi}_{l2}^T \ \boldsymbol{\varphi}_{l3}^T \ \boldsymbol{\varphi}_{l4}^T]^T, \quad \boldsymbol{\Psi}_l = [E_{l1} \ E_{l2} \ E_{l3}]^T,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}^- \ \varepsilon_{11}^+ \ \varepsilon_{22}^- \ \varepsilon_{22}^+ \ 2\varepsilon_{12}^- \ 2\varepsilon_{12}^+ \ 2\varepsilon_{13}^- \ 2\varepsilon_{13}^+ \ 2\varepsilon_{23}^- \ 2\varepsilon_{23}^+ \ \varepsilon_{33}]^T,$$

где $\mathbf{B}_M^{r_1 r_2}$ и $\mathbf{B}_E^{r_1 r_2}$ – постоянные на элементе матрицы, индексы r_1, r_2 здесь и далее принимают значения 0 и 1; $\xi_\alpha \in [-1, 1]$ – нормализованные криволинейные координаты.

Используя смешанный функционал Ху-Васидзу [5], интегрируя по объему элемента и разрешая полученные при варьировании функционала уравнения относительно неизвестных векторов перемещений и потенциалов, получаем условия равновесия пьезоэлектрического элемента:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_M & \mathbf{K}_{ME}^{(t)} & \mathbf{K}_{ME}^{(b)} \\ \mathbf{K}_{ME}^{(t)T} & \mathbf{K}_E^{(t)} & \mathbf{O}_{8 \times 8} \\ \mathbf{K}_{ME}^{(b)T} & \mathbf{O}_{8 \times 8} & \mathbf{K}_E^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \Phi_t \\ \Phi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S \\ \mathbf{O}_{8 \times 1} \\ \mathbf{O}_{8 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{K}_M = \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} (\mathbf{B}_M^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{D}_M \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{B}_M^{\eta_1 \eta_2}, \quad (15a)$$

$$\mathbf{K}_{ME}^{(l)} = \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} (\mathbf{B}_M^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{D}_{ME}^{(l)} \mathbf{B}_E^{\eta_1 \eta_2}, \quad (15b)$$

$$\mathbf{K}_E^{(l)} = \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} (\mathbf{B}_E^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{D}_E^{(l)} \mathbf{B}_E^{\eta_1 \eta_2}. \quad (15c)$$

Здесь \mathbf{F}_B и \mathbf{F}_S – действующие на элементе объемные и поверхностные нагрузки;

\mathbf{Q}^{00} – единичная матрица порядка 11×11 . Проективные матрицы $\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2}$ имеют вид:

$$\mathbf{Q}^{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Определим также материальные матрицы:

$$\mathbf{D}_M = \begin{bmatrix} D_{11}^{00} & D_{11}^{01} & D_{12}^{00} & D_{12}^{01} & D_{16}^{00} & D_{16}^{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{11}^{11} & D_{12}^{01} & D_{12}^{11} & D_{16}^{01} & D_{16}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{22}^{00} & D_{22}^{01} & D_{26}^{00} & D_{26}^{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{22}^{11} & D_{26}^{01} & D_{26}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{66}^{00} & D_{66}^{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & D_{66}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & D_{55}^{00} & D_{55}^{01} & D_{45}^{00} & D_{45}^{01} & 0 \\ & & & & & & & D_{55}^{11} & D_{45}^{01} & D_{45}^{11} & 0 \\ & & & & & & & & D_{44}^{00} & D_{44}^{01} & 0 \\ & & & & & & & & & D_{44}^{11} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & & & & & & D_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{ME}^{(l)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -n_l^0 e_{31}^{(l)} & n_l^0 e_{31}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n_l^1 e_{31}^{(l)} & n_l^1 e_{31}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n_l^0 e_{32}^{(l)} & n_l^0 e_{32}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n_l^1 e_{32}^{(l)} & n_l^1 e_{32}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n_l^0 e_{36}^{(l)} & n_l^0 e_{36}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n_l^1 e_{36}^{(l)} & n_l^1 e_{36}^{(l)} \\ m_l^{00} e_{15}^{(l)} & m_l^{01} e_{15}^{(l)} & m_l^{00} e_{25}^{(l)} & m_l^{01} e_{25}^{(l)} & 0 & 0 \\ m_l^{10} e_{15}^{(l)} & m_l^{11} e_{15}^{(l)} & m_l^{10} e_{25}^{(l)} & m_l^{11} e_{25}^{(l)} & 0 & 0 \\ m_l^{00} e_{14}^{(l)} & m_l^{01} e_{14}^{(l)} & m_l^{00} e_{24}^{(l)} & m_l^{01} e_{24}^{(l)} & 0 & 0 \\ m_l^{10} e_{14}^{(l)} & m_l^{11} e_{14}^{(l)} & m_l^{10} e_{24}^{(l)} & m_l^{11} e_{24}^{(l)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33}^{(l)} h_l^{-1} & e_{33}^{(l)} h_l^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_E^{(l)} = \begin{bmatrix} k_l^{00} \in_{11}^{(l)} & k_l^{01} \in_{11}^{(l)} & k_l^{00} \in_{12}^{(l)} & k_l^{01} \in_{12}^{(l)} & 0 & 0 \\ & k_l^{11} \in_{11}^{(l)} & k_l^{01} \in_{12}^{(l)} & k_l^{11} \in_{12}^{(l)} & 0 & 0 \\ & & k_l^{00} \in_{22}^{(l)} & k_l^{01} \in_{22}^{(l)} & 0 & 0 \\ & & & k_l^{11} \in_{22}^{(l)} & 0 & 0 \\ & & & & -h_l^{-1} \in_{33}^{(l)} & h_l^{-1} \in_{33}^{(l)} \\ \text{sym.} & & & & & -h_l^{-1} \in_{33}^{(l)} \end{bmatrix},$$

$$D_{ab}^{\eta r_2} = \sum_{k=1}^N n_k^{\eta r_2} \tilde{C}_{ab}^{(k)} + n_b^{\eta r_2} \tilde{C}_{ab}^{(b)} + n_t^{\eta r_2} \tilde{C}_{ab}^{(t)}, \quad D_{33} = \sum_{k=1}^N h_k \tilde{C}_{33}^{(k)} + h_b \tilde{C}_{ab}^{(b)} + h_t \tilde{C}_{ab}^{(t)},$$

$$n_k^{r_1 r_2} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} (N^-)^{2-\eta_1-r_2} (N^+)^{\eta_1+r_2} d\alpha_3,$$

$$n_b^{r_1 r_2} = \int_{\delta_0-h_b}^{\delta_0} (N^-)^{2-r_1-r_2} (N^+)^{r_1+r_2} d\alpha_3, \quad n_t^{r_1 r_2} = \int_{\delta_N}^{\delta_N+h_t} (N^-)^{2-r_1-r_2} (N^+)^{r_1+r_2} d\alpha_3,$$

$$n_b^{r_1} = \frac{1}{h_b} \int_{\delta_0-h_b}^{\delta_0} (N_b^-)^{1-r_1} (N_b^+)^{r_1} d\alpha_3, \quad n_t^{r_1} = \frac{1}{h_t} \int_{\delta_N}^{\delta_N+h_t} (N_t^-)^{1-r_1} (N_t^+)^{r_1} d\alpha_3,$$

$$k_b^{\eta r_2} = - \int_{\delta_0-h_b}^{\delta_0} (N_b^-)^{2-\eta_1-r_2} (N_b^+)^{\eta_1+r_2} d\alpha_3, \quad k_t^{\eta r_2} = - \int_{\delta_N}^{\delta_N+h_t} (N_t^-)^{2-\eta_1-r_2} (N_t^+)^{\eta_1+r_2} d\alpha_3,$$

$$m_b^{\eta r_2} = \int_{\delta_0-h_b}^{\delta_0} (N^-)^{1-\eta} (N^+)^{\eta} (N_b^-)^{1-r_2} (N_b^+)^{r_2} d\alpha_3,$$

$$m_t^{\eta r_2} = \int_{\delta_N}^{\delta_N+h_t} (N^-)^{1-\eta} (N^+)^{\eta} (N_t^-)^{1-r_2} (N_t^+)^{r_2} d\alpha_3.$$

Рассмотренные в статье примеры относятся к так называемым актюаторным проблемам, когда на электродах на внешних поверхностях пьезоэлектрических накладок подается заданное напряжение, а на поверхностях склейки композитной основы и пьезоэлектрических слоев напряжение принимается равным 0. Для таких задач конечноэлементное уравнение (14) упрощается и может быть записано в виде

$$\mathbf{K}_M \mathbf{V} = -\mathbf{K}_{ME}^{(t)} \Phi_t - \mathbf{K}_{ME}^{(b)} \Phi_b + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S. \quad (16)$$

Далее применяется стандартная процедура сборки элементов в ансамбль и решение полученной системы линейных уравнений методом Холецкого.

Численные результаты и их обсуждение

Рассмотрим задачу цилиндрического изгиба консольной пластины из углепластика с накладками из PZT-5A, прикрепленными к нижней и верхней поверхностям пластины (рис. 2), где $L = 1$ м, $H = 0,1$ м. Актюаторы поляризованы в направлениях α_3 и $-\alpha_3$. К поверхностям $\alpha_3 = -H/2$ и $\alpha_3 = H/2$ приложены равные электрические потенциалы φ_0 (задача растяжения) либо потенциалы $\pm \varphi_0$ (задача изгиба). Ненулевые механические и пьезоэлектрические константы материалов приведены в табл. 1. Задача моделировалась сеткой 8×1 . На рис. 3 приведены

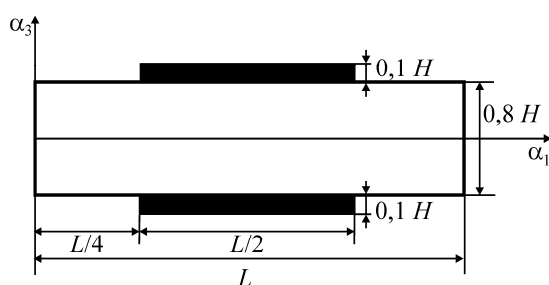


Рис. 2. Консольная пластина с пьезоэлектрическими накладками

Таблица 1

Механические и пьезоэлектрические константы углепластика и пьезоэлектрика PZT-5A

Константа	Углепластик	PZT-5A
C_{11} , Па	$183,443 \cdot 10^9$	$99,201 \cdot 10^9$
C_{22}	$11,662 \cdot 10^9$	$99,201 \cdot 10^9$
C_{33}	$11,662 \cdot 10^9$	$86,856 \cdot 10^9$
C_{12}	$4,363 \cdot 10^9$	$54,016 \cdot 10^9$
C_{13}	$4,363 \cdot 10^9$	$50,778 \cdot 10^9$
C_{23}	$3,918 \cdot 10^9$	$50,778 \cdot 10^9$
C_{44}	$2,870 \cdot 10^9$	$21,100 \cdot 10^9$
C_{55}	$7,170 \cdot 10^9$	$21,100 \cdot 10^9$
C_{66}	$7,170 \cdot 10^9$	$22,593 \cdot 10^9$
d_{31}, d_{32} , м/В	0	$-171 \cdot 10^{-12}$
d_{33}	0	$374 \cdot 10^{-12}$
d_{24}, d_{15}	0	$584 \cdot 10^{-12}$

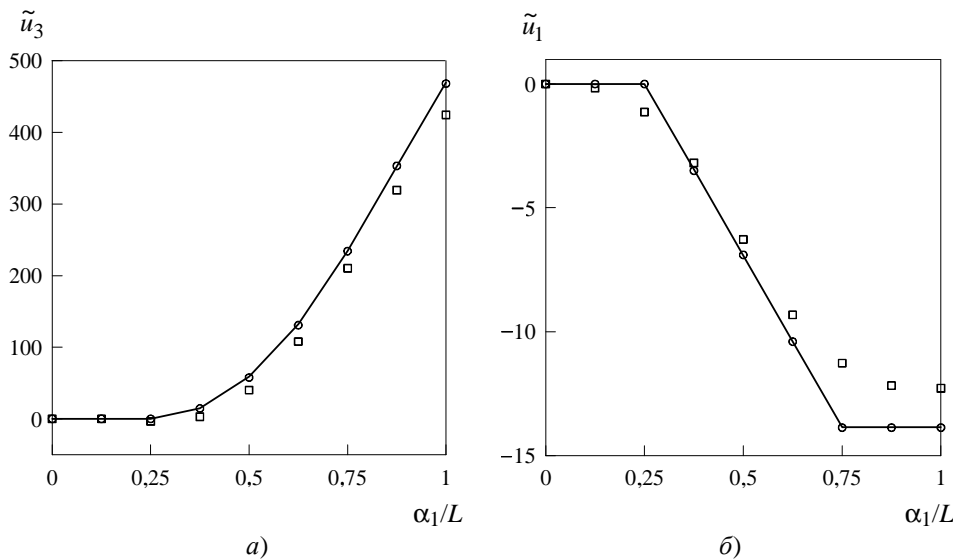


Рис. 3. Перемещения консольной пластины с пьезоэлектрическими накладками:

a – задача изгиба; *b* – задача растяжения; — – GEXP4;
 □ – трехмерное решение [2]; ○ – решение на основе CPLT [2]

безразмерные перемещения $\tilde{u}_k = \frac{C_0 u_k}{e_0 \Phi_0}$, где $e_0 = d_{31}C_{11} + d_{32}C_{12} + d_{33}C_{13} =$

$= -7,209 \text{ К/м}^2$, $C_0 = 99,201 \cdot 10^9 \text{ Па}$ для задачи изгиба ($k = 3$) и растяжения ($k = 1$). Приведено сравнение с полученными в [2] трехмерным аналитическим решением и аналитическим решением, полученным на основе классической теории многослойных пластин (CPLT). Как видим, наблюдается хорошее согласование с решением на основе CPLT. Отличия от точного трехмерного решения достигают максимума на свободном конце пластины и составляют 10 % в задаче изгиба и 13 % в задаче растяжения.

В следующем примере рассмотрена консольная квадратная шестислойная пластина из углепластика Т300/976 с накладками из пьезоэлектрика PZT G1195 (рис. 4, *a*) с $a = 0,254$, $b = 0,254$, $h = 0,828$, $h_t = h_b = 0,254$. Ненулевые механические и пьезоэлектрические константы материалов приведены в табл. 2. Ориентация слоев в углепластике [30/30/0/0/30/30] приводит к существенному проявлению эффекта анизотропии. К внешним поверхностям пьезоэлектрических слоев приложен электрический потенциал $\pm 100 \text{ В}$. Задача моделировалась сеткой 20×20 . Исследовалось влияние относительной длины l/a пьезоэлектрической накладки на безразмерные перемещения на свободном конце пластины $\tilde{u}_3(a) = u_3(a, b/2)/b$ и $\tilde{w}_3(a) = (u_3(a, b) - u_3(a, 0))/b$. Из рис. 5 видим, что эти зависимости не являются монотонными. Приведено сравнение с результатами из [4], полученными на основе теории пластин Кирхгоффа путем использования метода Ритца. Отличие в результатах может быть объяснено различными методами решения. На рис. 6 приведены безразмерные перемещения $\tilde{u}_3 = u_3(\alpha_1, b/2)/b$ и $\tilde{w}_3 = (u_3(\alpha_1, b) - u_3(\alpha_1, 0))/b$ для случая $l/a = 0,5$. Как видим, зависимость перемещения от координаты носит сложный характер, что трудно учесть при использовании метода Ритца.

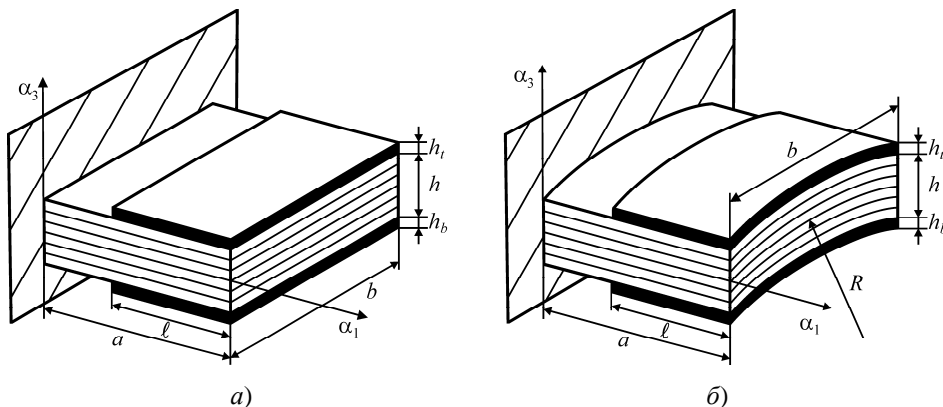


Рис. 4. Шестислойная консольная пластина (а) и цилиндрическая оболочка (б) с пьезоэлектрическими накладками

Таблица 2

Механические и пьезоэлектрические константы углепластика Т300/976 и пьезоэлектрика PZT G1195

Константа	Т300/976	PZT G1195
E_{11} , Па	$150 \cdot 10^9$	$63 \cdot 10^9$
E_{22}, E_{33} , Па	$9 \cdot 10^9$	$63 \cdot 10^9$
ν	0,3	0,3
G_{12}, G_{13} , Па	$7,1 \cdot 10^9$	$24,2 \cdot 10^9$
G_{23} , Па	$3 \cdot 10^9$	$24,2 \cdot 10^9$
d_{31}, d_{32} , м/В	0	$254 \cdot 10^{-12}$

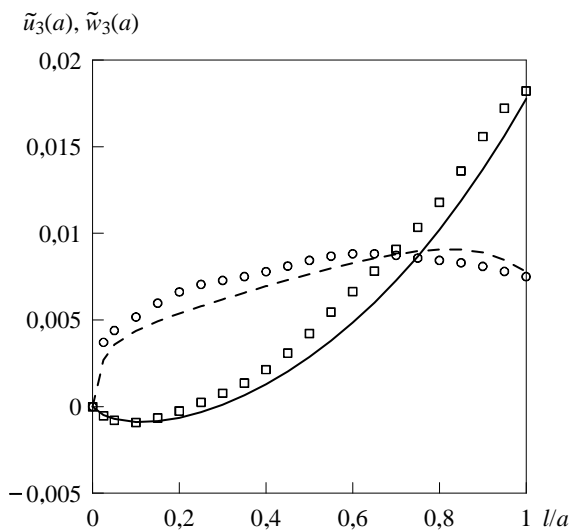


Рис. 5. Влияние длины пьезоэлектрических накладок на перемещения на свободном конце пластины:
 — $\tilde{u}_3(a)$ (GEXP4); - - - $\tilde{w}_3(a)$ (GEXP4);
 □ - $\tilde{u}_3(a)$ [4]; ○ - $\tilde{w}_3(a)$ [4]

Далее решалась аналогичная задача, но вместо пластины рассматривалась цилиндрическая оболочка (рис. 4, б). Расчеты проводились при $R/b = 10$ и $R/b = 100$. Как видим (рис. 7), при увеличении кривизны k_2 значения перемещений уменьшаются. Для оболочки с большей кривизной в диапазоне от $l/a = 0,2$ до $l/a = 0,9$ перемещение $\tilde{w}_3(a)$ практически не меняется, а $\tilde{u}_3(a)$ растет медленно.

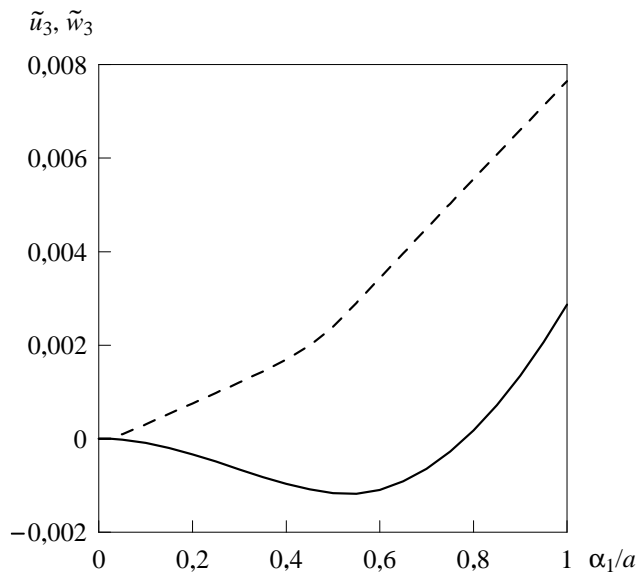


Рис. 6. Зависимость перемещений пластины от координаты при $l/a = 0,5$:
 — — \tilde{u}_3 (GEXP4); - - - \tilde{w}_3 (GEXP4)

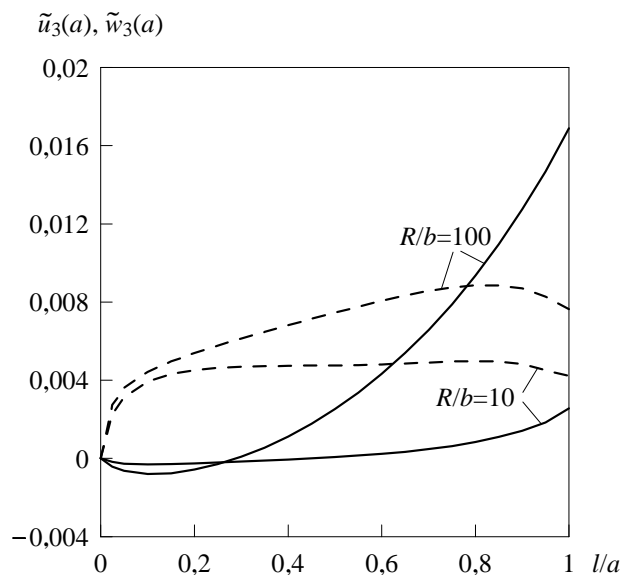


Рис. 7. Влияние длины пьезоэлектрических накладок на перемещения на свободном конце цилиндрической оболочки:
 — — $\tilde{u}_3(a)$ (GEXP4); - - - $\tilde{w}_3(a)$ (GEXP4)

Заключение

Построенная конечно-элементная модель для расчета электроупругого состояния оболочек с переменной толщиной позволяет решать задачи для пластин и оболочек с пьезоэлектрическими накладками. Данная модель является эффективной и достаточно точной. На ее основе может быть создан код, позволяющий в режиме реального времени управлять деформациями конструкций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 2.1.1/660).

Список литературы

1. Crawley, E.F. Induced strain actuation of isotropic and anisotropic plates / E.F. Crawley, K.B. Lazarus // *AIAA Journal*. – 1991. – Vol. 29. – P.944–951.
2. Vel, S.S. Analysis of piezoelectric bimorphs and plates with segmented actuators / S.S. Vel, R.S. Batra // *Thin-Walled Structures*. – 2001. – Vol. 39. – P. 23–44.
3. Wang, B.T. Laminate plate theory for spatially distributed induced strain actuators / B.T. Wang, C.A. Rogers // *Journal of Composite Materials*. – 1991. – Vol. 25. – P. 433–452.
4. Kioua, H. Piezoelectric induced bending and twisting of laminated composite shallow shells / H. Kioua, S. Mirza // *Smart Materials and Structures*. – 2000. – Vol. 9. – P. 476–484.
5. Kulikov, G.M. Geometrically exact four-node piezoelectric solid-shell element / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2008. – Vol. 15. – P. 199–207.
6. Kulikov, G.M. On the use of 6-parameter multilayered shell models in structural mechanics / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та*. – 2004. – Т. 10, № 4А. – С. 1042–1052.
7. Kulikov, G.M. Geometrically exact assumed stress-strain multilayered solid-shell elements based on the 3D analytical integration / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Computers & Structures*. – 2006. – Vol. 84, No 19–20. – P. 1275–1287.
8. Новацкий, В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. – М. : Мир, 1986. – 160 с.
9. Ausserer, M.F. An eighteen-node solid element for thin shell analysis / M.F. Ausserer, S.W. Lee // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1998. – Vol. 26. – P. 1345–1364.

Calculation of Composite Shells with Piezoelectric Plates

S.V. Plotnikova, M.G. Kulikov

*Department “Applied Mathematics and Mechanics”, TSTU;
kulikov@apmath.tstu.ru*

Key words and phrases: composite covering; finite elements method; piezoelectric.

Abstract: The paper presents the mathematical model based on the shell theory with regard for transverse contraction; it describes electro-resistant condition of multi-layer anisotropic shells with piezoelectric plates. The mixed geometrically accurate

piezoelectric element of the shell is designed. The numerical examples confirming the viability of the proposed model are given. The analysis of the effect of the piezoelectric plate size on the movement of multi-layer composite plates and shells is carried out.

Berechnung der Kompositenumhüllungen mit den piezoelektrischen Belägen

Zusammenfassung: Auf Grund der Umhüllungentheorie mit Rücksicht auf die Querverformung ist das mathematische Modell, das den elektroelastischen Zustand der vielschichtigen anisotropen Umhüllungen mit den piezoelektrischen Belägen beschreibt, vorgeschlagen. Es ist das gemischte geometrisch feine piezoelektrische Element der Umhüllung erarbeitet. Es sind die Zahlbeispiele, die die Stichhaltigkeit des vorgeschlagenen Modells bestätigen, angeführt. Es ist die Analyse des Einflusses der Größe der piezoelektrischen Beläge auf die Umstellungen der vielschichtigen Kompositplatten und Umhüllungen durchgeführt.

Calcul des enveloppes composites avec des plaques piézoélectriques

Résumé: A la base de la théorie des enveloppes et compte tenu du serrage transversal a été proposé un modèle mathématique décrivant l'état électrique et flexible des enveloppes multicouches anisotropes avec des plaques piézoélectriques. Est élaboré un élément géométrique précis mixte piézoélectrique de l'enveloppe. Sont cités les exemples numériques confirmant la valeur du modèle proposé. Est effectuée une analyse de l'influence de la dimension des plaques piézoélectriques sur les déplacements des plaques et des enveloppes composites.

Авторы: *Плотникова Светлана Валерьевна* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и механика»; *Куликов Михаил Геннадьевич* – аспирант, ГОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: *Коновалов Виктор Иванович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Химическая инженерия» ГОУ ВПО «ТГТУ».
