УДК 517.911.5

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Н.П. Пучков [1], А.И. Булгаков [3], А.А. Григоренко [3], А.И. Коробко [3], Е.В. Корчагина [2], А.Н. Мачина [4], О.В. Филиппова [3], И.В. Шлыкова [4]

Кафедры: «Высшая математика» (1),
«Прикладная математика и механика» (2), ГОУ ВПО «ТГТУ» ;
«Алгебра и геометрия», ГОУ ВПО «ТГУ им. Г.Р. Державина» (3);
«Математические науки и технологии»,
Норвежский университет естественных наук (4);

Ключевые слова и фразы: априорная ограниченность; вольтерров по А.Н. Тихонову оператор; выпуклость по переключению (разложимость); импульсные воздействия; функционально-дифференциальные включения.

Аннотация: Изучаются функционально-дифференциальные включения с вольтерровым по А.Н. Тихонову многозначным отображением как не обладающим свойством выпуклости по переключению значений, так и обладающим этим свойством (в последнем случае эти включения изучаются с импульсными воздействиями). Для таких включений рассмотрены вопросы продолжаемости решений. Установлена связь между априорной ограниченностью множества всех локальных решений системы и почти реализацией множеством решений расстояния в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений. Даны оценки расстояний от наперед заданной функции, имеющей специальный вид, до решения рассматриваемой системы. Сформулированы условия, при которых выполняются принцип плотности и «бэнг-бэнг» принцип.

Введение

В последние годы интенсивно изучаются возмущенные включения, порождаемые алгебраической суммой значений многозначных отображений, одно из которых имеет выпуклые по переключению значения [1, 2] (определение см. ниже). К таким включениям сводятся многие классы дифференциальных включений (обыкновенные дифференциальные, функционально-дифференциальные и т. д.). В указанных работах исследованы вопросы разрешимости, получены оценки решений, аналогичные оценкам А. Ф. Филиппова для обыкновенных дифференциальных включений, введено и исследовано понятие квазирешения, доказаны принцип плотности и «бэнг-бэнг» принцип. В [3–6] рассмотрены возмущенные включения с внешними и внутренними возмущениями. Доказано, что «небольшими» внутренними и внешними возмущениями нельзя пренебрегать, поскольку они могут существенно изменить множество решений возмущенного включения. В цитируемых работах доказательства полученных результатов существенно опирались на предположение, что многозначное отображение, образующее алгебраическую сумму значений, имеет выпуклые по переключению образы. Поэтому эти исследования еще раз подтверждают высказанное профессором В. М. Тихомировым предложение о том, что выпуклость по переключению (разложимость) является специфическим понятием пространства суммируемых функций, которое играет такую же фундаментальную роль, как понятие выпуклости множества в банаховом пространстве. Выпуклость по переключению неявно используется во многих разделах математики: в теории оптимизации, теории дифференциальных включений и т. д. Если отказаться от требования выпуклости по переключению значений многозначного отображения, то все существующие в настоящее время методы исследований многозначных отображений нельзя будет применить даже для изучения вопроса разрешимости возмущенного включения. Кроме того, в этом случае нарушится равенство между множествами квазирешений возмущенного включения и «овыпукленного» возмущенного включения, впервые установленное Т. Важевским для обыкновенных дифференциальных включений [7]. Дело в том, что в рассматриваемом случае замыкание (в слабой топологии пространства суммируемых функций) значений многозначного отображения не совпадает с его замкнутой выпуклой оболочкой. Вследствие чего не будут выполняться фундаментальные свойства множеств решений: принцип плотности и «бэнг-бэнг» принцип [8–12]. Данную ситуацию нельзя исправить никакой непрерывностью отображения, не обладающего свойством выпуклости по переключению образов.

Здесь рассматривается задача Коши для функционально-дифференциального включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений (разложимости) в пространстве суммируемых функций. К такому включению могут привести математические модели многокомпонентных систем автоматического управления [13], у которых в связи с отказом тех или иных приборов и устройств объекты регулируются разными законами управления (разными правыми частями) с разными множествами допустимых значений управления, то есть закон управления объектом состоит из набора подсистем управления. Эти подсистемы могут быть как линейными, так и не линейными. Такие случаи возникают, например, в вопросах управления гибридными системами [14–18].

В связи с вышесказанным в п. 2 для рассматриваемой задачи Коши вводится понятие обобщенного решения и изучаются его свойства. Доказано, что для функционально-дифференциального включения с вольтерровым по А. Н. Тихонову многозначным отображением имеет место теорема о существовании локального обобщенного решения и его продолжаемости. Это соответствует одному из сформулированных в монографии А. Ф. Филиппова [19] требований к обобщенным решениям для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Кроме того, в работе доказано, что в регулярном случае, когда многозначное отображение имеет выпуклые по переключению значения, обобщенное решение совпадает с обычным решением. В то же время, предложенное здесь обобщенное решение не удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к обобщенным (в смысле монографии [19]) решениям дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Так, например, предел обобщенных (в терминологии данной работы) решений может не быть обобщенным решением. Это связано с тем, что многозначное отображение, с помощью которого определяется обобщенное решение (определение см. ниже), не обладает свойством замкнутости в слабой топологии пространства суммируемых функций, поскольку оно может быть невыпуклозначно. В п. 3

рассматриваются обобщенно приближенные решения функционально-дифференциальных включений. В п. 4 формулируются свойства решений функционально-дифференциальных включений с многозначным отображением, имеющим выпуклые по переключению значения, и с импульсными воздействиями.

Обозначения и некоторые определения

Пусть $\mathbf{X}$ – нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$. Обозначим через $B_{\mathbf{X}}[x,\varepsilon]$ открытый шар пространства $\mathbf{X}$ с центром в точке $x \in \mathbf{X}$ и радиусом $\varepsilon > 0$, если $\varepsilon = 0$, то $B_{\mathbf{X}}[x,0] \equiv x$. Пусть $U \subset \mathbf{X}$. Тогда $\overline{U}$ – замыкание множества U; $\mathrm{co}U$ – выпуклая оболочка множества U; $\overline{\mathrm{co}}U \equiv \overline{\mathrm{co}U}$; $\mathrm{ext}U$ – множество крайних точек множества U; $\overline{\mathrm{ext}}U = \overline{\mathrm{ext}U}$; $\|U\|_{\mathbf{X}} = \sup\limits_{u\in U}\|u\|_{\mathbf{X}}$; $U^{\varepsilon} \equiv \overline{\cup_{u\in U}B[u,\varepsilon]}$, если $\varepsilon > 0$, и $U^0 \equiv \overline{U}$; $\rho_{\mathbf{X}}[x;U]$ – расстояние от точки $x \in \mathbf{X}$ до множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h^{+}_{\mathbf{X}}[U_1;U] \equiv \sup\limits_{x\in U_1}\rho_{\mathbf{X}}[x,U]$ – полуотклонение по Хаусдорфу множества $U_1 \subset \mathbf{X}$ от множества U в пространстве X; $h_X[U_1;U] = \max\{h^+[U_1;U];h^+[U;U_1]\}$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$; $\mathrm{comp}[\mathbf{X}]$ $(\mathrm{comp}[\mathbf{X}^*])$ – множество всех непустых компактов пространства $\mathbf{X}$ (множество всех непустых ограниченных замкнутых в пространстве X предкомпактных в слабой топологии пространства $\mathbf{X}$ подмножеств); $2^{\mathbf{X}}$ – множество всех непустых ограниченных подмножества пространства $\mathbf{X}$.

Пусть $\mathcal{P}$ – некоторая система подмножеств пространства $\mathbf{X}$ (множество, принадлежашее $\mathbf{X}$). Обозначим через $\Omega(\mathcal{P})$ множество всех непустых выпуклых подмножеств пространства $\mathbf{X}$, принадлежащих системе $\mathcal{P}$ (множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств, принадлежащих $\mathcal{P}$).

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное пространство вектор-столбцов, с нормой $|\cdot|$. Обозначим через $\mathbf{C}^n[a,b]$ $(\mathbf{D}^n[a,b])$ пространство непрерывных (абсолютно непрерывных) функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{C}^n} = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$ $\left(\|x\|_{\mathbf{D}^n[a,b]} = |x(a)| + \int\limits_a^b |\dot{x}(s)|ds\right)$. Пусть $\mathcal{U} \subset [a,b]$ – измеримое множество, $\mu(\mathcal{U}) > 0$ (μ – мера Лебега). Обозначим через $\mathbf{L}^n_p(\mathcal{U})$ пространство суммируемых функций $x:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ с p-й степенью и нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n_p(\mathcal{U})} = \left(\int\limits_{\mathcal{U}}|x(s)|^p ds\right)^{1/p}$.

Пусть $\Phi \subset \mathbf{L}^n_1$. Будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению (разложимо)*, если для любых $x,y \in \Phi$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется включение $\chi(\mathcal{U})x + \chi([a,b]\backslash\mathcal{U})y \in \Phi$, где $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция соответствующего множества.

Обозначим через $\Pi(\mathbf{L}^n_1[a,b])$ $(Q(\mathbf{L}^n_1[a,b]))$ множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению (непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями) подмножеств пространства $\mathbf{L}^n_1[a,b]$.

Пусть $F:[a,b]\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ – измеримое отображение. Обозначим $S(F) = \{y \in \mathbf{L}^n[a,b] : y(t) \in F(t) \quad \text{при почти всех} \quad t \in [a,b]\}$.

Обозначим через $\mathbf{C}^1_+[a,b](\mathbf{L}^1_+[a,b])$ конус неотрицательных функций пространства $\mathbf{C}^1[a,b](\mathbf{L}^1_1[a,b])$.

Измеримость однозначных функций везде понимается здесь по Лебегу, измеримость многозначных функций понимается в смысле [20].

Если $X = \mathbb{R}^n$, то в этом случае для сокращения записи индекс $\mathbb{R}^n$ в обозначениях расстояний опускаем.

Ниже приведем основные характеристические свойства выпуклых по переключению множеств, которые будут использоваться в дальнейшем.

Л е м м а 1. *Пусть* $\Phi \in \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$. *Тогда существует такая функция* $u \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$, *что для любой функции* $\varphi \in \Phi$ *и для почти всех* $t \in [a,b]$ *выполняется оценка* $|\varphi(t)| \leqslant u(t)$.

Л е м м а 2. *Пусть* $\Phi \in \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, $\varphi_i \in \Phi$, $i = 1,2,\dots$ – *последовательность, плотная в* Φ. *Далее, пусть измеримое отображение* $F:[a,b] \to \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *определено равенством*

$$F(t) = \overline{\{\varphi_i(t), \quad i = 1,2,\dots\}}.$$

Тогда справедливо равенство $S(F(\cdot)) = \Phi$.

Л е м м а 3. *Пусть измеримые отображения* $F_i : [a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i = 1,2,\dots$, *ограничены суммируемыми функциями. Тогда* $S(F_1(\cdot)) \subset S(F_2(\cdot))$ *тогда и только тогда, когда* $F_1(t) \subset F_2(t)$ *при почти всех* $t \in [a,b]$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $\Phi \in \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$, $F_i : [a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i = 1,2,\ldots$, – *такие измеримые отображения, что выполняются соотношения* $\Phi = S(F_1(\cdot)) = S(F_2(\cdot))$. *Тогда при почти всех* $t \in [a,b]$ *выполняется равенство* $F_1(t) = F_2(t)$.

З а м е ч а н и е 1. Таким образом, если $\Phi \in \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$, то измеримое отображение $F:[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, удовлетворяющее условию $S(F(\cdot)) = \Phi$, однозначно определяет множество Φ.

1. Выпуклая по переключению оболочка множества в пространстве суммируемых функций

Введено понятие выпуклой по переключению оболочки множества, принадлежащего пространству суммируемых функций. Исследованы свойства этой оболочки. Рассмотрено многозначное отображение, значения которого принадлежат пространству суммируемых функций и, вообще говоря, не обладают свойством выпуклости по переключению. По этому отображению построено «овыпукленное по переключению» отображение. Изучены топологические свойства такого отображения.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть Φ – непустое подмножество пространства $\mathbf{L}_1^n[a,b]$. Обозначим через $sw\Phi$ совокупность всевозможных конечных комбинаций

$$y = \chi(\mathcal{U}_1)x_1 + \chi(\mathcal{U}_2)x_2 + \ldots + \chi(\mathcal{U}_m)x_m \tag{1.1}$$

элементов $x_i \in \Phi$, $i = 1,2,\ldots,m$, где непересекающиеся измеримые подмножества $\mathcal{U}_i$, $i = 1,2,\ldots,m$, отрезка $[a,b]$ удовлетворяют условию $\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{U}_i = = [a,b]$. Пусть, далее, $\overline{sw}\Phi$ – замыкание множества $sw\Phi$ в пространстве $\mathbf{L}_1^n[a,b]$.

Л е м м а 4. *Для любого непустого множества* $\Phi \subset \mathbf{L}_1^n[a,b]$ *множество* $sw\Phi$ *выпукло по переключению.*

Действительно, пусть $y_1, y_2 \in sw\Phi$ и $\mathcal{U} \subset [a,b]$ – измеримое множество. Не уменьшая общности, будем считать, что

$$y_i = \chi(\mathcal{U}_1^i)x_1^i + \chi(\mathcal{U}_2^i)x_2^i + \ldots + \chi(\mathcal{U}_m^i)x_m^i, \tag{1.2}$$

где $x_j^i \in \Phi$, $j = 1,2,\ldots,m$, $i = 1,2$, измеримые непересекающиеся множества $\mathcal{U}_j^i \subset [a,b]$, $j = 1,2,\ldots,m$, $i = 1,2$, удовлетворяют условию $[a,b] = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{U}_j^i$, $i = 1,2$

(если число слагаемых, представляющих функции y_1 и y_2, различно, то недостающие слагаемые можно добавить произвольными функциями из множества Φ, умноженными на характеристические функции пустых множеств). Далее, из равенства

$$\chi(\mathcal{U})y_1 + \chi([a,b]\setminus\mathcal{U})y_2 = \sum_{i=1}^{m}\chi(\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_i^1)x_i^1 + \sum_{i=1}^{m}\chi(([a,b]\setminus\mathcal{U})\cap\mathcal{U}_i^2)x_i^2$$

вытекает, что $\chi(\mathcal{U})y_1 + \chi([a,b]\setminus\mathcal{U})y_2 \in sw\Phi$. Следовательно, множество $sw\Phi$ выпукло по переключению.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что если множество $\Phi\subset \mathbf{L}_1^n[a,b]$ ограничено, то множество $sw\Phi$, вообще говоря, может быть и неограниченным. Для этого докажем равенство

$$sw(B_{\mathbf{L}_p^n[a,b]}[0,1]) = \mathbf{L}_p^n[a,b] \qquad (p\in[1,\infty)). \tag{1.3}$$

З а м е ч а н и е 3. Из равенства (1.3) вытекает, что если множество $\Phi\subset \mathbf{L}_1^n[a,b]$ слабо предкомпактно в пространстве $\mathbf{L}_1^n[a,b]$, то множество $sw\Phi$ может и не обладать этим свойством.

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что если множество выпукло в пространстве $\mathbf{L}_1^n[a,b]$, то оно, вообще говоря, может и не быть выпуклым по переключению. Шар $B_{\mathbf{L}_1^n[a,b]}[0,1]$ обладает таким свойством.

Будем говорить, что множество $\Phi\subset \mathbf{L}_1^n[a,b]$ *ограничено суммируемой функцией,* если существует такая функция $\varphi_\Phi\in \mathbf{L}_+^1[a,b]$, что для любого $x\in\Phi$ при почти всех $t\in[a,b]$ выполняется неравенство $|x(t)|\leqslant\varphi_\Phi(t)$.

З а м е ч а н и е 5. Если множество $\Phi\subset \mathbf{L}_1^n[a,b]$ ограничено суммируемой функцией, то согласно лемме 2 для $\overline{sw}\Phi\in\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ найдется измеримое ограниченное суммируемой функцией отображение $F_{\overline{sw}\Phi}:[a,b]\to \mathrm{comp}[R^n]$, для которого справедливо равенство

$$\overline{sw}\Phi = S(F_{\overline{sw}\Phi}(\cdot)). \tag{1.4}$$

Л е м м а 5. *Если множество* $\Phi\subset \mathbf{L}_1^n[a,b]$ *выпукло по переключению, то* $sw\Phi=\Phi$.

С л е д с т в и е 2. *Если* $\Phi\subset \mathbf{L}_1^n[a,b]$, *то множество* $sw\Phi$ *– наименьшее выпуклое по переключению (разложимое) множество, содержащее множество* Φ.

Л е м м а 6. *Если множество* $\Phi\subset \mathbf{L}_1^n[a,b]$ *выпукло, то множество* $sw\Phi$ *также выпукло в пространстве* $\mathbf{L}_1^n[a,b]$.

По аналогии с определением выпуклой оболочки в нормированном пространстве множество $sw\Phi$ будем называть *выпуклой по переключению оболочкой множества* Φ *в пространстве суммируемых функций* или просто *выпуклой по переключению оболочкой множества* Φ. Аналогично $\overline{sw}\Phi$ будем называть *замкнутой выпуклой по переключению оболочкой множества* Φ.

З а м е ч а н и е 6. Если множество $\Phi\in Q\left(\mathbf{L}_1^n[a,b]\right)$, то построение замкнутой выпуклой по переключению оболочки множества Φ (множества $\overline{sw}\Phi$) эквивалентно нахождению измеримого ограниченного суммируемой функцией отображения $F_{\overline{sw}\Phi}:[a,b]\to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, удовлетворяющего равенству (1.4) (см. замечание 5). Отметим, что во многих случаях построение такого отображения проще, чем нахождение множества $\overline{sw}\Phi$. В то же время, при установлении метрических соотношений между множествами $\Phi_1,\Phi_2\subset \mathbf{L}_1^n[a,b]$ (см. лемму 8) и их выпуклыми по переключению оболочками удобнее пользоваться вышеприведенным определением.

Л е м м а 7. *Пусть* $v \in \mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset [a,b]$, *множество* $\Phi \subset \mathbf{L}_1^n[a,b]$ *и выпукло по переключению. Тогда для любых измеримых непересекающихся множеств* $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}$, *удовлетворяющих условию* $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}$, *справедливо равенство*

$$\rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[v;\Phi] = \rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U}_1)}[v;\Phi] + \rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U}_2)}[v;\Phi]. \tag{1.5}$$

Л е м м а 8. *Пусть множества* $\Phi_1, \Phi_2 \in Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *и существует такая функция* $\omega \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$, *что для любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *выполняется неравенство*

$$h^+_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\Phi_1;\Phi_2] \leqslant \int_{\mathcal{U}} \omega(s)ds. \tag{1.6}$$

Тогда для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *имеет место соотношение*

$$h^+_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[sw\Phi_1;sw\Phi_2] \leqslant \int_{\mathcal{U}} \omega(s)ds. \tag{1.7}$$

З а м е ч а н и е 7. Отметим, что функция $\omega \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ в неравенстве (1.6) дает равномерную оценку полуотклонения множеств $\Phi_1, \Phi_2 \in Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ относительно измеримых множеств $\mathcal{U} \subset [a,b]$.

З а м е ч а н и е 8. Соотношение (1.7) останется справедливым, если в левой части неравенства будут стоять замыкания в пространстве $\mathbf{L}_1^n[a,b]$ выпуклых по переключению оболочек соответствующих множеств.

Далее, будем говорить, что многозначное отображение $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *ограничено суммируемой функцией на множестве* $K \subset \mathbf{C}^n[a,b]$, если образ $\Phi(K)$ ограничен суммируемой функцией.

По заданному многозначному отображению $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ определим оператор $\widetilde{\Phi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ равенством

$$\widetilde{\Phi}(x) = \overline{sw}\Phi(x). \tag{1.8}$$

Отображение $\widetilde{\Phi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ будем называть *овыпукленным по переключению отображением.*

Отметим, что из непрерывности отображения $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, вообще говоря, не вытекает непрерывность оператора $\widetilde{\Phi}: \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенного равенством (1.8). Это показывает пример.

Пример. Определим суммируемую функцию $\varphi : [0,2] \times [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}^1$ равенствами (рис. 1)

$$\varphi(x,r)(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [x, x+r] \cap [0,2], \quad r \neq 0, \\ 0, & \text{если } t \notin [x, x+r] \cap [0,2], \quad r \neq 0, \\ 0, & \text{если} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; r = 0. \end{cases}$$

Пусть многозначное отображение $\Phi : [0,1] \to Q(\mathbf{L}_1^1[0,2])$ имеет вид

$$\Phi(r) = \begin{cases} \bigcup\limits_{x \in [0,2]} \varphi(x,r), & \text{если} \quad r \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad r = 0. \end{cases}$$

Отметим, что для любых $r_1, r_2 \in [0,1]$ имеет место соотношение

$$h_{\mathbf{L}_1^1[0,2]}[\Phi(r_1);\Phi(r_2)] = |r_1 - r_2|.$$

В то же время для любого $r \in (0,1]$ справедливо равенство

$$h_{\mathbf{L}_1^1[0,2]}[\widetilde{\Phi}(0);\widetilde{\Phi}(r)] = 2.$$

Используя лемму 8, можно получить следующие условия непрерывности овыпукленного по переключению отображения $\widetilde{\Phi}:\mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенного равенством (1.8).

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$. Будем говорить, что отображение $P: U \times U \to \mathbf{L}_+^1[a,b]$ *принимает нулевое значение на диагонали* $U \times U$, если для любого $x \in U$ имеет место равенство $P(x,x) = 0$; *симметрично на множестве* U, если для любых $x,y \in U$ выполняется соотношение $P(x,y) = P(y,x)$; *непрерывно по второму аргументу в точке* (x,x), *принадлежащей диагонали* $U \times U$, если для любой последовательности $y_i \to x, (y_i \in U)$ в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ при $i \to \infty$ справедливо равенство $P(x,x) = \lim\limits_{i\to\infty} P(x,y_i)$; *непрерывно по второму аргументу на диагонали* $U \times U$, если оно непрерывно по второму аргументу в каждой точке диагонали $U \times U$. Аналогично определяется непрерывность по первому аргументу на диагонали $U \times U$.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$. Будем говорить, что отображение $P: U \times U \to \mathbf{L}_+^1[a,b]$ обладает свойствами $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ на множестве U, если оно принимает нулевое значение на диагонали $U \times U$; кроме того, если оно непрерывно по второму аргументу на ней, то *оно обладает свойством* $\mathcal{A}$; если непрерывно по первому аргументу на ней, то *обладает свойством* $\mathcal{B}$; если непрерывно на ней и симметрично, то *обладает свойством* $\mathcal{C}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ *и для отображения* $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to$ $\to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *найдется такое отображение* $P: U \times U \to \mathbf{L}_+^1[a,b]$, *что для любых* $x,y \in U$ *и любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *выполняется оценка*

$$h^+_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\Phi(x),\Phi(y)] \leqslant \|P(x,y)\|_{\mathbf{L}_1^1(\mathcal{U})}. \tag{1.9}$$

Тогда для овыпукленного по переключению отображения $\widetilde{\Phi}:\mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, *определенного равенством* (1.8), *для любых* $x,y \in U$ и *любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *выполняется оценка* (1.9), *в которой* $\Phi(\cdot) \equiv \widetilde{\Phi}(\cdot)$.

С л е д с т в и е 3. *Если в условиях теоремы 1 отображение* $P: U \times U \to$ $\to \mathbf{L}_+^1[a,b]$ *обладает свойством* $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$) *на множестве* $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$, *то овы-*

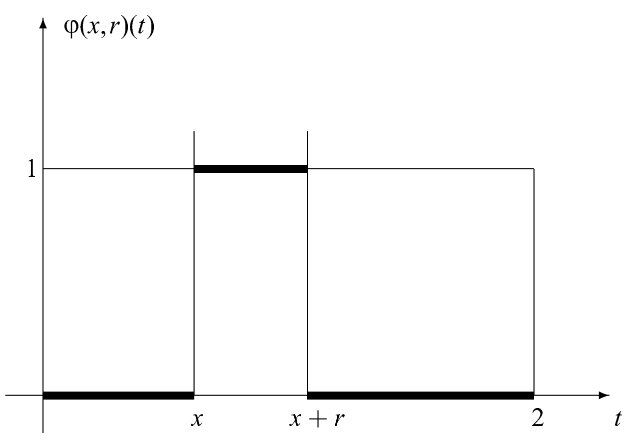

Рис. 1

пукленное по переключению отображение $\widetilde{\Phi}:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, *определенное равенством* (1.8), *полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху, непрерывно) по Хаусдорфу на множестве* $U\subset\mathbf{C}^n[a,b]$.

Отображение $P:U\times U\to\mathbf{L}_+^1[a,b]$ для любого измеримого множества $\mathcal{U}\subset[a,b]$, удовлетворяющее неравенству (1.9), будем называть *мажорантным* для отображения $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ на множестве U или просто *мажорантным*.

Пусть отображение $F_i:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i=1,2$, для каждой непрерывной функции $x\in\mathbf{C}^n[a,b]$ суперпозиционно измеримо и ограничено суммируемой функцией для каждого ограниченного множества $K\subset\mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение $\mathcal{M}:\mathbf{C}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, заданное равенством

$$\mathcal{M}(x)=\mathcal{N}_1(x)\cup\mathcal{N}_2(x), \tag{1.10}$$

где отображение $\mathcal{N}_i:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, $i=1,2$ – операторы Немыцкого, порожденные функциями $F_i:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i=1,2$. Для оператора $\mathcal{M}:\mathbf{C}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, имеющего вид (1.10), мажорантное отображение $\widetilde{P}:\mathbf{C}^n[a,b]\times\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathbf{L}_+^1[a,b]$ можно задать равенством

$$\widetilde{P}(x,y)(t)=\max\{h^+[F_1(t,x(t));F_1(t,y(t))];h^+[F_2(t,x(t));F_2(t,y(t))]\}. \tag{1.11}$$

Как следует из теоремы 1, оператор $\widetilde{P}(\cdot,\cdot)$, имеющий вид (1.11), будет мажорантным и для овыпукленного по переключению отображения $\widetilde{\mathcal{M}}:\mathbf{C}^n[a,b]\to$ $\to\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенного соотношением (1.8), в котором $\Phi(\cdot)\equiv\mathcal{M}(\cdot)$.

Кроме того, из следствия 3 вытекает, что, если отображения $F_i:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i=1,2$, полунепрерывны снизу (полунепрерывны сверху, непрерывны) по Хаусдорфу по второму аргументу, то овыпукленное по переключению отображение $\widetilde{M}:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, имеющее вид (1.8), полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху, непрерывно) по Хаусдорфу.

Определение 4. Будем говорить, что многозначное отображение $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$), если для него существует мажорантное отображение $P:\mathbf{C}^n[a,b]\times\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathbf{L}_+^1[a,b]$, удовлетворяющее свойству $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$).

2. Основные свойства обобщенных решений функционально-дифференциального включения

С помощью понятия выпуклой по переключению оболочки множества, принадлежащего пространству суммируемых функций, сформулировано обобщенное решение функционально-дифференциального включения, правая часть которого не обладает свойством выпуклости по переключению значений. На основе доказанных в п. 1 топологических свойств овыпукленного по переключению отображения изучены свойства обобщенного решения задачи Коши. Некоторые результаты по обобщенным решениям приведены в [21, 22].

Рассмотрим задачу Коши для функционально-дифференциального включения

$$\dot{x}\in\Phi(x),\qquad x(a)=x_0\ \ (x_0\in\mathbb{R}^n), \tag{2.1}$$

где отображение $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U\subset\mathbf{C}^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией. Отметим, что правая часть включения (2.1) может не обладать свойством выпуклости по переключению значений. Также отметим, что производная в (2.1) понимается как элемент пространства суммируемых функций, а не как производная в точке [8, 23, 24]. Изучение такой задачи наталкивается на принципиальные трудности, описанные во введении. В связи с этим введем понятие обобщенного решения задачи (2.1) и изучим его свойства. С помощью оператора Немыцкого, который обладает свойством выпуклости по переключению значений, задачу Коши для дифференциального включения в классической постановке [8, 23, 24] можно свести к эквивалентному виду (2.1).

О п р е д е л е н и е 5. *Обобщенным решением задачи* (2.1) будем называть абсолютно непрерывную функцию $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющую соотношениям

$$\dot{x}\in\overline{sw}\Phi(x), \qquad x(a)=x_0 \ \ (x_0\in\mathbb{R}^n). \tag{2.2}$$

Отметим, что согласно лемме 5, если множество $\Phi(x)$ в (2.1) выпукло по переключению, то обобщенное решение задачи (2.1) совпадает с классическим решением.

Как отмечалось во введении, включение (2.1) может состоять из набора подсистем управления. В связи с отказом того или иного устройства объект регулирования переходит с одного закона управления на другой. Так как отказы (переключения) могут происходить в любые моменты времени, и при этом должно быть гарантировано управление объектом, то модель должна учитывать все возможные траектории (состояния), соответствующие любым переключениям. Обобщенные решения включения (2.1) и составляют множество всех таких траекторий.

О п р е д е л е н и е 6. Будем говорить, что оператор $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to$ $\to S(\mathbf{L}^n[a,b])$ *вольтерров по А.Н. Тихонову (или просто вольтерров)* [23], если из условия $x|_\tau=y|_\tau$, $\tau\in(a,b]$ следует равенство $(\Phi(x))|_\tau=(\Phi(y))|_\tau$, где $z|_\tau$ – сужение функции $z\in\mathbf{C}^n[a,b]$ на отрезок $[a,\tau]$, $(\Phi(z))|_\tau$ – множество сужений всех функций из $\Phi(z)$ на отрезок $[a,\tau]$.

Далее, предположим, что оператор $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ (правая часть включения (2.1)) вольтерров. Из этого условия вытекает, что овыпукленный по переключению оператор $\widetilde{\Phi}:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенный равенством (1.9), также вольтерров.

Пусть $\tau\in(a,b]$. Далее, обозначим непрерывное отображение $V_\tau:\mathbf{C}^n[a,\tau]\to\mathbf{C}^n[a,b]$ равенствами

$$(V_\tau(x))(t)=\begin{cases} x(t), \text{ если } t\in[a,\tau], \\ x(\tau), \text{ если } t\in(\tau,b]. \end{cases} \tag{2.3}$$

О п р е д е л е н и е 7. Будем говорить, что абсолютно непрерывная функция $x:[a,\tau]\to\mathbb{R}^n$ является *обобщенным решением задачи* (2.1) на отрезке $[a,\tau]$, $\tau\in(a,b]$, если x удовлетворяет включению $\dot{x}\in(\overline{sw}\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$ и равенству $x(a)=x_0$, где непрерывное отображение $V_\tau:\mathbf{C}^n[a,\tau]\to\mathbf{C}^n[a,b]$ определено равенством (2.3).

Далее, будем говорить, что абсолютно непрерывная на каждом отрезке $[a,\tau]\subset$ $\subset[a,c)$, $c\in(a,b]$ функция $x:[a,c)\to\mathbb{R}^n$ является *обобщенным решением задачи* (2.1) на $[a,c)$, если для каждого $\tau\in(a,c)$ сужение функции x на отрезок $[a,\tau]$ является обобщенным решением задачи (2.1) на $[a,\tau]$.

Обобщенное решение $x:[a,c)\to\mathbb{R}^n$ задачи (2.1) на $[a,c)$ будем называть *непродолжаемым*, если не существует такого обобщенного решения y задачи (2.1) на $[a,\tau]$ (здесь $\tau\in(c,b]$, если $c<b$ и $\tau=b$, если $c=b$), что для любого $t\in[a,c)$

выполнено равенство $x(t) = y(t)$. Обобщенное решение задачи (2.1) считается непродолжаемым.

Далее, в теоремах 2–6 предполагается, что отображение $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* $\mathcal{A}$. Согласно следствию 3 овыпукленное по переключению отображение $\widetilde{\Phi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенное равенством (1.8), полунепрерывно снизу. Поэтому в силу [25, 26] у овыпукленного по переключению отображения $\widetilde{\Phi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ найдется непрерывная однозначная ветвь. На основании этого справедливы следующие теоремы о локальных обобщенных решениях.

Т е о р е м а 2. *Найдется такое* $\tau \in (a,b]$, *что обобщенное решение задачи* (2.1) *существует на отрезке* $[a,\tau]$.

Т е о р е м а 3. *Для того, чтобы обобщенное решение* $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ *задачи* (2.1) *было продолжаемым на некоторый отрезок* $[a,\tau]$ $(\tau \in (c,b])$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\overline{\lim\limits_{t\to c-0}} |x(t)| < \infty$.

Т е о р е м а 4. *Если* y – *обобщенное решение задачи* (2.1) *на* $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b)$, *то существует непродолжаемое решение* x *задачи* (2.1) *либо на* $[a,c)$ $(c \in (\tau,b])$, *либо на* $[a,b]$ *такое, что при любом* $t \in [a,\tau]$ *выполнено равенство* $x(t) = y(t)$.

Пусть $H(x_0,\tau)$ – множество всех обобщенных решений задачи (2.1) на отрезке $[a,\tau]$ $(\tau \in (a,b])$.

Будем говорить, что множество всех локальных обобщенных решений задачи (2.1) *априорно ограничено,* если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a,b]$ не существует обобщенного решения $y \in H(x_0,\tau)$, для которого выполняется неравенство $\|y\|_{\mathbf{C}^n[a,\tau]} > r$.

Из теорем 2–4 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 5. *Пусть множество всех локальных обобщенных решений задачи* (2.1) *априорно ограничено. Тогда для любого* $\tau \in (a,b]$ *множество* $H(x_0,\tau) \neq \varnothing$ *и существует такое* $r > 0$, *что для каждых* $\tau \in (a,b]$, $y \in H(x_0,\tau)$ *выполняется неравенство* $\|y\|_{\mathbf{C}^n[a,\tau]} \leqslant r$.

О п р е д е л е н и е 8. Будем говорить, что отображение $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* Γ_1, если найдется изотонный непрерывный оператор $\Gamma_1 : \mathbf{C}_+^1[a,b] \to \mathbf{L}_+^1[a,b]$, для которого справедливы условия: для любой функции $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$ и произвольного измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(x)\|_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})} \leqslant \|\Gamma_1(Zx)\|_{\mathbf{L}_1^1(\mathcal{U})}; \tag{2.4}$$

множество всех локальных решений задачи

$$\dot{y} = \Gamma_1(y), \quad y(a) = |x_0| \tag{2.5}$$

априорно ограничено. Здесь непрерывное отображение $Z : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathbf{C}_+^1[a,b]$ определено равенством

$$(Zx)(t) = |x(t)|. \tag{2.6}$$

Л е м м а 9. *Пусть многозначное отображение* $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* Γ_1. *Тогда овыпукленное по переключению отображение* $\widetilde{\Phi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, *определенное равенством* (1.8), *обладает этим свойством.*

Т е о р е м а 6. *Пусть отображение* $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* Γ_1. *Тогда для любого* $\tau \in (a,b]$ *множество* $H(x_0,\tau)$ *непусто и существует* *такое* $r > 0$, *что для любых* $\tau \in (a,b]$ *и* $y \in H(x_0, \tau)$ *выполняется неравенство* $\|y\|_{\mathbf{C}^n[a,\tau]} \leqslant r$.

Непрерывный линейный оператор $\Lambda : \mathbf{L}_1^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ определим равенством

$$(\Lambda z)(t) = \int_a^t z(s)ds, \quad t \in [a,b]. \tag{2.7}$$

Оператор $\Lambda : \mathbf{L}_1^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ будем называть *оператором интегрирования.*

Определение 9. Будем говорить, что множество обобщенных решений задачи (2.1) *почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений*, если для любого $v \in \mathbf{L}_1^n[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое обобщенное решение $x \in \mathbf{D}^n[a,b]$ задачи (2.1), что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$\|\dot{x} - v\|_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})} \leqslant \rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[v, \overline{sw}\Phi(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}). \tag{2.8}$$

Если неравенство (2.8) выполняется и при $\varepsilon = 0$, то будем говорить, что множество обобщенных решений задачи (2.1) реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.

Теорема 7. *Пусть множество всех локально обобщенных решений задачи* (2.1) *априорно ограничено. И пусть отображение* $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* $\mathcal{C}$. *Тогда множество обобщенных решений задачи* (2.1) *почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений. Если* $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Omega(Q(\mathbf{L}_1^n[a,b]))$, *то множество обобщенных решений задачи* (2.1) *реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.*

Из теорем 6, 7 вытекает следствие.

Следствие 4. *Пусть отображение* $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* Γ_1 *и* $\mathcal{C}$. *Тогда множество обобщенных решений задачи* (2.1) *почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений. Если* $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Omega(Q(\mathbf{L}_1^n[a,b]))$, *то множество обобщенных решений задачи* (2.1) *реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.*

Замечание 9. Пусть отображение $\widetilde{\Psi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to 2^{\mathbf{C}^n[a,b]}$ задано равенством

$$\widetilde{\Psi}(x) = x_0 + \Lambda\widetilde{\Phi}(W_r(x)). \tag{2.9}$$

Оператор $\widetilde{\Phi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ определен отношением (1.8), а непрерывное отображение $W_r : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ имеет вид

$$(W_r x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad |x(t)| \leqslant r+2, \\ \dfrac{r+2}{|x(t)|}x(t), & \text{если} \quad |x(t)| > r+2. \end{cases}$$

Пусть $H(W_r)$ – множество неподвижных точек отображения $\widetilde{\Psi}$, заданного равенством (2.9). Так как оператор W_r ограничен на всем пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$, то множество $U = \overline{\text{co}}\widetilde{\Psi}(\mathbf{C}^n[a,b])$ – выпуклый компакт пространства $\mathbf{C}^n[a,b]$, причем $\widetilde{\Psi}(U) \subset U$. Поэтому множество $H(W_r) \neq \varnothing$ и принадлежит множеству U. Пусть число $r > 0$ таково, что для каждого $\tau \in (a,b]$, $y \in H(x_0, \tau)$ выполняется неравенство $\|y\|_{\mathbf{C}^n[a,\tau]} \leqslant r$. Тогда для любого $\tau \in (a,b]$ справедливо равенство

$H(W_r)|_\tau = H(x_0,\tau)$ и, следовательно, $H(x_0,b) \subset U$. Другими словами, если множество всех локально обобщеных решений задачи (2.1) априорно ограничено, то для любого $\tau \in (a,b]$ найдется выпуклый компакт пространства $\mathbf{C}^n[a,\tau]$, которому принадлежит множество $H(x_0,\tau)$.

О п р е д е л е н и е 10. Будем говорить, что отображение $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* $\Gamma_2^{u,\varepsilon,p}$, если найдется изотонный непрерывный вольтерров оператор $\Gamma_2 : \mathbf{C}_+^1[a,b] \to \mathbf{L}_+^1[a,b]$, удовлетворяющий условиям: $\Gamma_2(0)=0$, для любых функций $x,y \in \mathbf{C}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\Phi(x);\Phi(y)] \leqslant \|\Gamma_2(Z(x-y))\|_{\mathbf{L}_1^1(\mathcal{U})}; \tag{2.10}$$

множество всех локальных решений задачи

$$\dot{y} = u + \varepsilon + \Gamma_2(y), \;\; y(a) = p \tag{2.11}$$

априорно ограничено. Здесь непрерывное отображение $Z : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathbf{C}_+^1[a,b]$ определено равенством (2.6), $u \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$, числа $\varepsilon, p \geq 0$.

Будем предполагать, что функции $y \in \mathbf{D}^n[a,b]$ и $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяют неравенству

$$\rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\dot{y};\Phi(y)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} \varkappa(s)ds. \tag{2.12}$$

Т е о р е м а 8. *Пусть функции* $y \in \mathbf{D}^n[a,b]$ *и* $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ *для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *удовлетворяют неравенству* (2.12). *И пусть отображение* $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* $\Gamma_2^{\varkappa,\varepsilon,p}$, *где* $\varepsilon \geqslant 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0 – *начальное условие задачи* (2.1). *Тогда для любого обобщенного решения* $x \in \mathbf{D}^n[a,b]$ *задачи* (2.1), *удовлетворяющего для любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *неравенству* (2.8), *в котором* $v = \dot{y}$, *при любом* $t \in [a,b]$ *имеет место оценка*

$$\Theta(x-y)(t) \leqslant \xi(\varkappa,\varepsilon,p)(t) \tag{2.13}$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ *справедливо соотношение*

$$|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)| \leqslant \varkappa(t) + \varepsilon + (\Gamma_2(\xi(\varkappa,\varepsilon,p)))(t), \tag{2.14}$$

где функция $\xi(\varkappa,\varepsilon,p) \in \mathbf{D}^1[a,b]$ – *верхнее решение задачи* (2.11) *при* $u = \varkappa$ *и* $p = |x_0 - y(a)|$, *отображение* $\Theta : \mathbf{D}^n[a,b] \to \mathbf{C}_+^1[a,b]$ *задано равенством*

$$(\Theta z)(t) = |z(a)| + \int\limits_a^t |\dot{z}(s)|ds.$$

Из теорем 7, 8 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 9. *Пусть функции* $y \in \mathbf{D}^n[a,b]$ *и* $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ *для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *удовлетворяют неравенству* (2.12). *И пусть отображение* $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* $\Gamma_2^{\varkappa,\varepsilon,p}$, *где* $\varepsilon \geqslant 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0 – *начальное условие задачи* (2.1) *и множество всех локально обобщенных решений задачи* (2.1) *априорно ограничено. Тогда при* $\varepsilon > 0$ *существует обобщенное решение* $x \in \mathbf{D}^n[a,b]$ *задачи* (2.1), *для которого при всех*

$t \in [a,b]$ *справедлива оценка* (2.13) *и при почти всех* $t \in [a,b]$ *выполняется соотношение* (2.14).

Если $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Omega(Q(\mathbf{L}_1^n[a,b]))$, *то утверждение справедливо и для* $\varepsilon = 0$.

Следствие 5. *Пусть функции* $y \in \mathbf{D}^n[a,b]$ *и* $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ *для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *удовлетворяют неравенству* (2.12). *И пусть отображение* $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойствами* Γ_1 *и* $\Gamma_2^{\varkappa,\varepsilon,p}$, *где* $\varepsilon \geq 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0 *– начальное условие задачи* (2.1). *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *существует обобщенное решение* $x \in \mathbf{D}^n[a,b]$ *задачи* (2.1), *для которого при всех* $t \in [a,b]$ *справедлива оценка* (2.13) *и при почти всех* $t \in [a,b]$ *выполняется соотношение* (2.14).

Если $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Omega(Q(\mathbf{L}_1^n[a,b]))$, *то утверждение справедливо и для* $\varepsilon = 0$.

Замечание 10. Отметим, что утверждения теорем 8, 9 и следствия 3 остаются в силе, если функции $y \in \mathbf{D}^n[a,b]$ и $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяют неравенству

$$\rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\dot{y}; \overline{sw}\Phi(y)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} \varkappa(s)ds.$$

Определение 11. Будем говорить, что абсолютно непрерывная функция $x \in \mathbf{D}^n[a,b]$ – *обобщенное квазирешение задачи* (2.1), если найдется такая последовательность функций $x_i \in \mathbf{D}^n[a,b]$, $i = 1,2,\ldots$, что выполняются условия: $x_i \to x$ в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ при $i \to \infty$; для любого $i = 1,2,\ldots$, имеют место включение $\dot{x}_i \in \overline{sw}\Phi(x)$ и равенство $x_i(a) = x_0$.

Отметим, что согласно лемме 5, если множество $\Phi(x)$ в определении обобщенного квазирешения выпукло по переключению, то обобщенное квазирешение совпадает с квазирешением, введенным в работах [3,5], в случае когда $\Phi(\cdot)$ – оператор Немыцкого. Заметим также, что данное определение обобщенного квазирешения несколько отличается от определения квазитраектории, данного в работах [7, 27, 28], наличием условия $\dot{x}_i \in \overline{sw}\Phi(x)$. В силу этого можно получить более общие результаты о свойствах квазирешений (см. замечание 11), и, кроме того, оно более удобно для приложений.

Пусть $\mathcal{H}(x_0)$ – множество всех обобщенных квазирешений задачи (2.1).

Определим отображение $\widetilde{\Phi}_{\text{co}} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Omega(\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b]))$ равенством

$$\widetilde{\Phi}_{\text{co}}(x) = \overline{\text{co}}(\overline{sw}\Phi(x)). \tag{2.15}$$

Оператор $\widetilde{\Phi}_{\text{co}} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Omega(\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b]))$ будем называть *обобщенно овыпукленным оператором.*

Рассмотрим задачу (2.1) с обобщенно овыпукленным отображением $\widetilde{\Phi}_{\text{co}} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Omega(\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b]))$, заданным равенством (2.15),

$$\dot{x} \in \widetilde{\Phi}_{\text{co}}(x), \ \ x(a) = x_0 \ \ (x_0 \in \mathbb{R}^n). \tag{2.16}$$

Пусть $H_{\text{co}}(x_0, \tau)$ – множество всех решений задачи (2.16) на отрезке $[a, \tau]$ $(\tau \in (a,b])$.

Теорема 10. *Справедливо равенство* $\mathcal{H}(x_0) = H_{\text{co}}(x_0, b)$.

Замечание 11. Отметим, что теорема 10 справедлива без предположения какой-либо непрерывности и совокупной ограниченности отображения $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$.

Определение 12. Будем говорить, что компактное выпуклое множество $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ *обладает свойством* $\mathcal{D}$, если справедливо вложение $\mathcal{H}(x_0) \subset U$

и для любого $x \in \mathcal{H}(x_0)$ найдется такая последовательность абсолютно непрерывных функций $x_i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $i = 1,2,\ldots,$ что выполняются условия: $x_i \to x$ в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ при $i \to \infty$; для любого $i = 1,2,\ldots,$ имеют место включения $x_i \in U$, $\dot{x}_i \in \overline{sw}\Phi(x)$ и равенство $x_i(a) = x_0$.

Л е м м а 10. *Пусть множество всех локальных решений задачи* (2.16) *априорно ограничено. Тогда найдется множество* $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$, *обладающее свойством* $\mathcal{D}$.

Действительно, в силу теоремы 10 и замечания 9 множество $U = \overline{\text{co}}\widetilde{\Psi}\,(\mathbf{C}^n\,[a,b])$ обладает этим свойством, где отображение $\widetilde{\Psi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to 2^{\mathbf{C}^n[a,b]}$ определено равенством (2.9), в котором $\widetilde{\Phi}(\cdot) \equiv \widetilde{\Phi}_{\text{co}}(\cdot)$.

Л е м м а 11. *Пусть множества* $\Phi_i \in \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, $i = 1,2,$ *и измеримые отображения* $F_i : [a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i = 1,2,$ *связаны между собой соотношениями* $\Phi_i = S(F_i(\cdot))$, $i = 1,2$. *Тогда для любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *выполняются неравенства*

$$h_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\Phi_1;\Phi_2] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} h[F_1(t);F_2(t)]dt \leqslant 2h_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\Phi_1;\Phi_2]. \tag{2.17}$$

Пусть $F : [a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ – измеримое отображение. Отображение $\text{co}F : [a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ определим равенством

$$(\text{co}F)(t) = \text{co}(F(t)).$$

С л е д с т в и е 6. *Пусть множества* $\Phi_i \in \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, $i = 1,2,$ *и измеримые отображения* $F_i : [a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i = 1,2,$ *связаны между собой соотношениями* $\Phi_i = S(F_i(\cdot))$, $i = 1,2$. *Тогда для любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *выполняется неравенство*

$$h_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\overline{\text{co}}(\Phi_1);\overline{\text{co}}(\Phi_2)] \leqslant 2h_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\Phi_1;\Phi_2]. \tag{2.18}$$

Действительно, согласно [29] имеет место равенство $\overline{\text{co}}(\Phi_i) = S(\text{co}F_i(\cdot))$, $i = 1,2$. Поэтому для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ имеет место соотношение

$$h_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\overline{\text{co}}(\Phi_1);\overline{\text{co}}(\Phi_2)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} h[(\text{co}F_1)(t);(\text{co}F_2)(t)]dt.$$

Так как для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\mathcal{U}} h[(\text{co}F_1)(t);(\text{co}F_2)(t)]dt \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} h[F_1(t);F_2(t)]dt,$$

то из неравенств (2.17) вытекает неравенство (2.18).

О п р е д е л е н и е 13. Будем говорить, что отображение $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to$ $\to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* Γ_3, если выполняется свойство $\Gamma_2^{0,0,0}$, а задача (2.11) при $u = 0$, $\varepsilon = 0$, $p = 0$ на каждом отрезке $[a,\tau]$ $(\tau \in (a,b])$ имеет только нулевое решение.

Т е о р е м а 11. *Пусть множество всех локально обобщенных решений задачи* (2.1) *априорно ограничено. Далее, пусть отображение* $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *удовлетворяет условию* Γ_3. *Тогда* $H(x_0,b) \neq \varnothing$ *и справедливо равенство*

$$\overline{H(x_0,b)} = H_{\text{co}}(x_0,b), \tag{2.19}$$

где $\overline{H(x_0,b)}$ *– замыкание множества* $H(x_0,b)$ *в пространстве* $\mathbf{C}^n[a,b]$.

Следствие 7. *Пусть отображение* $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *удовлетворяет условиям* Γ_1 *и* Γ_3. *Тогда* $H(x_0,b) \neq \varnothing$ *и справедливо соотношение* (2.19).

Замечание 12. Свойство, когда множество решений включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости значений, плотно во множестве решений «овыпукленного» включения, называют принципом плотности. Принцип плотности является фундаментальным свойством в теории включений [30]. Установлению принципа плотности для включений посвящены многие работы (например, [4, 8–11, 19, 23, 24, 30–33]). Таким образом, теорема 11 и следствие 5 утверждают, что для обобщенных решений задачи (2.1) выполняется принцип плотности.

3. Обобщенные приближенные решения функционально-дифференциального включения

Приближенные решения играют важную роль при изучении дифференциальных уравнений и включений [19, 34–36]. *Они используются в теоремах существования (например, ломанные Эйлера), при исследовании зависимости решения от начальных условий и от правой части уравнения. В работе* [34] *для дифференциального уравнения с кусочно-непрерывной правой частью с помощью так называемых внутренних и внешних возмущений дано определение приближенного решения, которое учитывало не только малые изменения правой части в областях ее непрерывности, но и малые изменение границ этих областей. В монографии* [19] *дано более общее определение приближенного решения, которое пригодно для исследования не только дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, но и дифференциального включения с полунепрерывной сверху и выпуклозначной правой частью. В этой работе для них установлено важное свойство, что предел приближенных решений есть решение диффренциального включения. Здесь даются разные определения обобщенных приближенных решений для функционально-дифференциальных включений. Главное отличие этих определений от сформулированного в монографии* [19] *заключается в том, что здесь значения многозначных отображений, которые определяют приближенные решения, не овыпукляются. Это обстоятельство позволило исследовать топологические свойства множеств обобщенных приближенных решений, доказать признак их устойчивости.*

Обозначим через $K([a,b]\times[0,\infty))$ множество всех функций $\eta : [a,b]\times[0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающих свойствами: при каждом $\delta \geqslant 0$ функция $\eta(\cdot,\delta) \in \mathbf{L}_1^1[a,b]$; для каждого $\delta \geqslant 0$ найдется такая функция $\beta_\delta(\cdot) \in \mathbf{L}_1^1[a,b]$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $\tau \in [0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,\delta) \leqslant \beta_\delta(t)$, при почти всех $t \in [a,b]$ справедливы равенства $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \eta(t,\delta) = \eta(t,0) = 0$.

Обозначим через $P(\mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty))$ множество всех непрерывных функций $\omega : \mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty) \to [0,\infty)$, для которых при любом $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$ справедливо соотношение $\omega(x,0) = 0$ и для любых $(x,\delta) \in \mathbf{C}^n[a,b]\times(0,\infty)$ выполняется неравенство $\omega(x,\delta) > 0$.

Так как обобщенное решение задачи (2.1) определяется с помощью замкнутой выпуклой по переключению оболочки множества, то естественно поставить вопрос о том, как влияют погрешности вычисления замкнутой выпуклой по переключению оболочки значений отображения $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ на определение множества обобщенных решений задачи (2.1). В силу замечания 5 для каждого фиксированного $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$ построение значения $\overline{sw}\Phi(x)$ эквивалентно нахождению измеримого ограниченного суммируемой функцией отображения $F_x : [a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, удовлетворяющего равенству

$$\overline{sw}\Phi(x) = S(F_x(\cdot)). \tag{3.1}$$

Отображение $F_x : [a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ далее будем записывать $F : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to$ $\to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и будем называть отображением, порождающим овыпукленное по переключению отображение $\widetilde{\Phi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенное равенством (1.8) (или просто порождающее овыпукленное по переключению отображение). В связи с тем, что отображения $F(\cdot,\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ непосредственно связаны равенством (3.1), влияние погрешностей вычисления замкнутой выпуклой по переключению оболочки значений отображения $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ на нахождение множества обобщенных решений задачи (2.1) выясним через точность вычислений значений отображения $F : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающего овыпукленное по переключению отображение. Точность вычисления значения отображения $F(\cdot,\cdot)$ зададим функцией $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$. В связи с этим рассмотрим отображение $F_\eta : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, имеющее вид

$$F_\eta(t,x,\delta) = (F(t,x))^{\eta(t,\delta)}, \tag{3.2}$$

где функция $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$ в каждой точке $(t,x) \in [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b]$ при каждом фиксированном $\delta \in [0,\infty)$ определяет погрешность вычислений значений отображения $F(\cdot,\cdot)$, порождающего овыпукленное по переключению отображение, причем эти погрешности равномерны относительно переменной $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$. Далее функцию $\eta(\cdot,\cdot)$ по аналогии с [6] будем называть радиусом внешних возмущений отображения $F(\cdot,\cdot)$.

Заметим, что из (3.2) при всех $(t,x) \in [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b]$ вытекает равенство

$$h[F(t,x);F_\eta(t,x,\delta)] = \eta(t,\delta). \tag{3.3}$$

Таким образом, из соотношения (3.3) вытекает, что для каждой функции $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$ при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$ справедливо соотношение

$$\lim_{\delta \to 0+0} h[F(t,x);F_\eta(t,x,\delta)] = 0. \tag{3.4}$$

Поэтому все отображения $F_\eta : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенные равенством (3.2) и зависящие от радиуса внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times$ $\times [0,\infty))$, близки в смысле равенства (3.4) к отображению $F : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to$ $\to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$. Это приближение будем называть поточечной аппроксимацией вложением отображения $F(\cdot,\cdot)$, порождающего овыпукленное по переключению отображение, или просто поточечной аппроксимацией вложением. Отображение $F_\eta : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ будем называть аппроксимирующим оператором.

Далее, определим отображение $\widetilde{\Phi}_\eta : \mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, заданное соотношением

$$\widetilde{\Phi}_\eta(x,\delta) = S(F_\eta(\cdot,x,\delta)), \tag{3.5}$$

где оператор $F_\eta : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ имеет вид (3.2).

Из равенств (3.3) и (3.5) для любого $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$ вытекает соотношение

$$h_{\mathbf{L}_1^n[a,b]}\left[\widetilde{\Phi}_\eta(x,\delta);\widetilde{\Phi}(x)\right] = \int_a^b \eta(t,\delta)dt. \tag{3.6}$$

Поэтому из (3.6) и теоремы Лебега следует равенство

$$\lim_{\delta\to 0+0} h_{\mathbf{L}_1^n[a,b]}[\widetilde{\Phi}_\eta(x,\delta);\widetilde{\Phi}(x)] = 0. \qquad (3.7)$$

Таким образом, все отображения $\widetilde{\Phi}_\eta : \mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty)\to\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, заданные равенствами (3.2), (3.5) и зависящие от радиуса внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$, близки (в смысле равенства (3.7)) к овыпукленному по переключению отображению $\widetilde{\Phi} : \mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенному равенством (1.8). Это приближение оператора $\widetilde{\Phi}(\cdot)$ будем называть поточечной аппроксимацией вложением в среднем. Таким образом, из поточечной аппроксимации вложением отображения $F(\cdot,\cdot)$, порождающего овыпукленное по переключению отображение, вытекает поточечная аппроксимация отображения $\widetilde{\Phi}(\cdot)$ в среднем.

Л е м м а 12 [4]. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– нормированное пространство,* $U\subset\mathbf{X}$ *– выпуклое множество. Тогда для любых* $x_1,x_2\in U$ и *всех* $r_1,r_2>0$ *справедливо неравенство*

$$h_{\mathbf{X}}[B_{\mathbf{X}}[x_1,r_1]\cap U;B_{\mathbf{X}}[x_2,r_2]\cap U]\leqslant\|x_1-x_2\|_{\mathbf{X}}+|r_2-r_1|. \qquad (3.8)$$

Пусть $U\subset\mathbf{C}^n[a,b]$ – выпуклое замкнутое множество и пусть $\omega(\cdot,\cdot)\in$ $\in P(\mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty))$. Рассмотрим многозначное отображение $M_U(\omega)$. $M_U(\omega):U\times[0,\infty)\to\Omega(U)$ и имеет вид

$$M_U(\omega)(x,\delta)=\overline{B_{\mathbf{C}^n[a,b]}[x,\omega(x,\delta)]}\cap U. \qquad (3.9)$$

Из неравенства (3.8) вытекает следующая лемма.

Л е м м а 13. *Пусть* $U\subset\mathbf{C}^n[a,b]$ *– выпуклое замкнутое множество и пусть* $\omega(\cdot,\cdot)\in P(\mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty))$. *Тогда многозначное отображение* $M_U(\omega):U\times[0,\infty)\to\Omega(U)$, *заданное соотношением* (3.9), *непрерывно по Хаусдорфу.*

Определим отображение $\varphi_U(\omega):[a,b]\times U\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ соотношением

$$\varphi_U(\omega)(t,x,\delta)=\sup_{y\in M_U(\omega)(x,\delta)} h[F(t,x);F(t,y)], \qquad (3.10)$$

где отображение $M_U(\omega):U\times[0,\infty)\to\Omega(U)$ задано равенством (3.9), а отображение $F:[a,b]\times\mathbf{C}^n[a,b]\to\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ – порождающее овыпукленное по переключению отображение $\widetilde{\Phi}:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенное равенством (1.8).

Значение функции $\varphi_U(\omega)(\cdot,\cdot,\cdot)$ в точке $(t,x,\delta)\in[a,b]\times U\times[0,\infty)$, на наш взгляд, естественно назвать *модулем непрерывности отображения* $F:[a,b]\times\mathbf{C}^n[a,b]\to\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ *в точке* (t,x) *по переменной* x *на множестве* U, функцию $\omega(\cdot,\cdot)$ *– функцией радиуса модуля непрерывности отображения* или просто *радиусом непрерывности,* а саму функцию $\varphi_U(\cdot,\cdot,\cdot)$ *– функцией модуля непрерывности* или просто *модулем непрерывности отображения* $F:[a,b]\times\mathbf{C}^n[a,b]\to$ $\to\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ *на множестве* U *относительно радиуса непрерывности* $\omega(\cdot,\cdot)$.

О п р е д е л е н и е 14. Будем говорить, что отображение $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to$ $\to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ *обладает свойством* $\widetilde{\mathcal{C}}$, если оператор $F:[a,b]\times\mathbf{C}^n[a,b]\to$ $\to\operatorname{comp}[R^n]$, порождающий овыпукленное по переключению отображение $\widetilde{\Phi}$: $\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенное равенством (1.8), обладает следующим свойством: при почти всех $t\in[a,b]$ отображение $F(t,\cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу.

Л е м м а 14. *Если для отображения* $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ *найдется такой непрерывный изотонный оператор* $\Gamma:\mathbf{C}_+^1[a,b]\to\mathbf{L}_+^1[a,b]$, *удовлетворяющий* *условию* $\Gamma(0)=0$, *что для любых* $x,y\in\mathbf{C}^n[a,b]$ *и любого измеримого множества* $\mathcal{U}\subset[a,b]$ *имеет место неравенство* (2.10), *в котором* $\Gamma_2\equiv\Gamma$, *то отображение* $\Phi(\cdot)$ *обладает свойством* $\widetilde{\mathcal{C}}$.

Л е м м а 15. *Пусть* U – *непустое, выпуклое, компактное множество пространства* $\mathbf{C}^n[a,b]$ *и пусть* $\omega(\cdot,\cdot)\in P(\mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty))$. *Далее, пусть отображение* $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* $\widetilde{\mathcal{C}}$. *Тогда отображение* $\varphi_U(\omega):[a,b]\times U\times[0,\infty)$, *заданное равенством* (3.10), *обладает свойствами: для любых* $(x,\delta)\in U\times[0,\infty)$ *функция* $\varphi_U(\omega)(\cdot,x,\delta)$ *измерима*; *при почти всех* $t\in[a,b]$ *отображение* $\varphi_U(t,\cdot,\cdot)$ *непрерывно на* $U\times[0,\infty)$; *для любого* $x\in U$ *при почти всех* $t\in[a,b]$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{z\to x,\delta\to 0+0}\varphi_U(\omega)(t,z,\delta)=0; \tag{3.11}$$

существует такая суммируемая функция $p_U:[a,b]\to[0,\infty)$, *что при почти всех* $t\in[a,b]$ *для любого* $x\in U$ *и всех* $\delta\in[0,\infty)$ *справедлива оценка* $\varphi_U(\omega)(t,x,\delta)\leqslant$ $\leqslant p_U(t)$.

О п р е д е л е н и е 15. Пусть $U\subset\mathbf{C}^n[a,b]$. Будем говорить, что функция $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$ *равномерно на множестве* $U\subset\mathbf{C}^n[a,b]$ *оценивает сверху относительно радиуса непрерывности* $\omega(\cdot,\cdot)\in P(\mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty))$ *модуль непрерывности отображения* $F:[a,b]\times\mathbf{C}^n[a,b]\to\text{comp}[\mathbb{R}^n]$, *порождающего овыпукленное по переключению отображение* $\widetilde{\Phi}:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, *определенное равенством* (1.8), если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $x\in U$ и $\delta\in(0,\delta(\varepsilon)]$ выполняется неравенство

$$\varphi_U(\omega)(t,x,\delta)\leqslant\eta(t,\varepsilon), \tag{3.12}$$

где отображение $\varphi_U:[a,b]\times U\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ определено равенством (3.10).

Пусть $U\subset\mathbf{C}^n[a,b]$ и пусть $\omega(\cdot,\cdot)\in P(\mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty))$. Определим функцию $\lambda_U(\omega):[a,b]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ соотношением

$$\lambda_U(\omega)(t,\delta)=\sup_{x\in U}\varphi_U(\omega)(t,x,\delta). \tag{3.13}$$

Из леммы 15 вытекает следствие.

С л е д с т в и е 8. *Пусть* U– *непустое, выпуклое, компактное множество пространства* $\mathbf{C}^n[a,b]$ *и пусть* $\omega(\cdot,\cdot)\in P(\mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty))$. *Далее, пусть отображение* $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* $\widetilde{\mathcal{C}}$. *Тогда отображение* $\lambda_U(\omega):[a,b]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, *определенное равенством* (3.13), *принадлежит множеству* $K([a,b]\times[0,\infty))$ *и равномерно на множестве* $U\subset\mathbf{C}^n[a,b]$ *оценивает сверху относительно радиуса непрерывности* $\omega(\cdot,\cdot)\in P(\mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty))$ *модуль непрерывности отображения* $F:[a,b]\times\mathbf{C}^n[a,b]\to\text{comp}[\mathbb{R}^n]$, *порождающего овыпукленное по переключению отображение* $\widetilde{\Phi}:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, *определенное равенством* (1.8).

З а м е ч а н и е 13. Следствие 8 устанавливает, что если U – непустое выпуклое компактное множество пространства $\mathbf{C}^n[a,b]$, и отображение $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* $\widetilde{\mathcal{C}}$, то найдется хотя бы одна функция $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$, которая равномерно на множестве U оценивает сверху относительно наперед заданного радиуса непрерывности $\omega(\cdot,\cdot)\in P(\mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty))$ модуль непрерывности отображения $F:[a,b]\times\mathbf{C}^n[a,b]\to\text{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающего овыпукленное по переключению отображение $\widetilde{\Phi}:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенное равенством (1.8).

Пусть $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$. Рассмотрим для каждого $\delta \in [0,\infty)$ задачу Коши

$$\dot{x} \in \widetilde{\Phi}_{\eta}(x,\delta),\ x(a) = x_0 \ \ (x_0 \in \mathbb{R}^n), \tag{3.14}$$

где отображение $\widetilde{\Phi}_{\eta} : \mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ задано соотношениями (3.1), (3.5). Так как овыпукленный по переключению оператор $\widetilde{\Phi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенный соотношением (1.8), вольтерров по Тихонову, то порождающее его отображение $F : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ обладает свойством: если $x = y$ на $[a,\tau]$ $(\tau \in (a,b])$, то при почти всех $t \in [a,\tau]$ выполняется равенство $F(t,x) = F(t,y)$. Из этого свойства и равенств (3.1), (3.4) вытекает, что оператор $\widetilde{\Phi}_{\eta} : \mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ при каждом $\delta \in [0,\infty)$ является вольтерровым по Тихонову оператором.

Каждое решение задачи (3.14) при фиксированном $\delta > 0$ будем называть обобщенным δ-решением (обобщенным приближенным решением с внешними возмущениями) задачи (2.1). Обозначим через $H_{\eta(\delta)}(U)$ множество всех обобщенных δ-решений задачи (2.1), принадлежащих множеству $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$.

Т е о р е м а 12. *Пусть множество $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ обладает свойством $\mathcal{D}$. Тогда для любой функции $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$, равномерно на множестве $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ оценивающей сверху относительно радиуса непрерывности $\omega(\cdot,\cdot) \in \in P(\mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty))$ модуль непрерывности отображения $F : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающего овыпукленное по переключению отображение $\widetilde{\Phi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенное равенством* (1.8), *справедливо равенство*

$$H_{\mathrm{co}}(x_0,b) = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(U)}, \tag{3.15}$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}(U)}$ – замыкание в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ множества $H_{\eta(\delta)}(U)$.

Т е о р е м а 13. *Пусть множество $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ обладает свойством $\mathcal{D}$. Для выполнения равенства*

$$\overline{H(x_0,b)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(U)} \tag{3.16}$$

для любого радиуса внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$ необходимо и достаточно выполнение равенства (2.18).

З а м е ч а н и е 14. Отметим, что выполнение равенства (3.16) для любых внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$ является свойством устойчивости множества обобщенных решений $H(x_0,b)$ задачи (2.1) относительно этих возмущений.

Как уже отмечалось, внешнее возмущение (радиус внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$) характеризует погрешность вычисления значений овыпукленного по переключению отображения $\widetilde{\Phi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенного равенством (1.8). В то же время каждое обобщенное решение $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ задачи (2.1) может вычисляться с некоторой степенью точности, которую можно задать некоторой функцией из множества $P(\mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty))$. Эту точность определения обобщенного решения задачи (2.1) можно учесть так называемыми внутренними возмущениями, которые определим ниже. Далее покажем, что внутренние возмущения существенно влияют на свойства обобщенных решений задачи (2.1).

Определим отображение $F_{\text{ext}} : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ равенством

$$F_{\text{ext}}(t,x) = \overline{\text{ext}}(\text{co}F(t,x)), \tag{3.17}$$

где $F : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ – отображение, порождающее овыпукленный по переключению оператор $\widetilde{\Phi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенный равенством (1.8). Отметим, что для каждого $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$ отображение $F_{\text{ext}}(\cdot,x)$ измеримо [24] и ограничено суммируемой функцией.

Рассмотрим оператор $\widetilde{\Phi}_{\text{ext}} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, имеющий вид

$$\widetilde{\Phi}_{\text{ext}}(x) = S(F_{\text{ext}}(\cdot,x)), \tag{3.18}$$

где отображение $F_{\text{ext}} : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ задано соотношением (3.17).

З а м е ч а н и е 15. Отметим, что для любого $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$ множество $\widetilde{\Phi}_{\text{ext}}(x)$ обладает свойством

$$\overline{\text{co}}(\widetilde{\Phi}_{\text{ext}}(x)) = \overline{\text{co}}(\overline{sw}\Phi(x)). \tag{3.19}$$

Причем множество $\widetilde{\Phi}_{\text{ext}}(x)$ – минимальное по включению среди непустых замкнутых в пространстве $\mathbf{L}_1^n[a,b]$ выпуклых по переключению подмножеств, принадлежащих множеству $\overline{sw}\Phi(x)$ и удовлетворяющих равенству (3.19) (см., например, [10]). Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \widetilde{\Phi}_{\text{ext}}(x), \quad x(a) = x_0 \ \ (x_0 \in \mathbb{R}^n). \tag{3.20}$$

Каждое решение (квазирешение) задачи (3.20) будем называть обобщенным экстремальным решением (обобщенным экстремальным квазирешением) задачи (2.1).

Пусть $\mathcal{H}_{\text{ext}}(x_0)$ – множество всех обобщенных экстремальных квазирешений задачи (2.1). Из теоремы 10, замечания 11 и равенства (3.19) вытекает следствие.

С л е д с т в и е 9. *Справедливо равенство* $\mathcal{H}_{\text{ext}}(x_0) = H_{\text{co}}(x_0,b)$.

Пусть $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$, $\omega(\cdot,\cdot) \in P(\mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty))$. Пусть U – выпуклое замкнутое множество пространства $\mathbf{C}^n[a,b]$. Далее, пусть отображения $\widetilde{\Phi}_{\eta,\omega} : U \times [0,\infty) \to \text{comp}[\mathbf{L}_1^n[a,b]^*]$, $F_{\text{ext},\eta} : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty) \to$ $\to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\widetilde{\Phi}_{\text{ext},\eta} : \mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, $\widetilde{\Phi}_{\text{ext},\eta,\omega} : \mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty) \to$ $\to \text{comp}[\mathbf{L}_1^n[a,b]^*]$ определены соотношениями

$$\widetilde{\Phi}_{\eta,\omega}(x,\delta) = \widetilde{\Phi}_{\eta}((M_U(\omega)(x,\delta));\delta); \tag{3.21}$$

$$(F_{\text{ext},\eta})(t,x,\delta) = (F_{\text{ext}}(t,x))^{\eta(t,\delta)}; \tag{3.22}$$

$$(\widetilde{\Phi}_{\text{ext},\eta})(x,\delta) = S(F_{\text{ext},\eta}(\cdot,x,\delta)); \tag{3.23}$$

$$(\widetilde{\Phi}_{\text{ext},\eta,\omega})(x,\delta) = (\widetilde{\Phi}_{\text{ext},\eta})((M_U(\omega)(x,\delta)),\delta), \tag{3.24}$$

где отображения $\widetilde{\Phi}_{\eta} : \mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty) \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, $M_U(\omega) : U \times [0,\infty) \to \Omega(U)$, $F_{\text{ext}} : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty) \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ заданы равенствами (3.5), (3.9), (3.17) соответственно.

На множестве $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ для каждого $\delta > 0$ рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \widetilde{\Phi}_{\eta,\omega}(x,\delta), \quad x(a) = x_0 \ \ (x_0 \in \mathbb{R}^n); \tag{3.25}$$

$$\dot{x} \in \widetilde{\Phi}_{\text{ext},\eta,\omega}(x,\delta), \quad x(a) = x_0 \ \ (x_0 \in \mathbb{R}^n), \tag{3.26}$$

где отображения $\widetilde{\Phi}_{\eta,\omega} : U \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbf{L}_1^n[a,b]^*]$, $\widetilde{\Phi}_{\eta,\omega} : U \times [0,\infty) \to$ $\to \mathrm{comp}[\mathbf{L}_1^n[a,b]^*]$, определены соотношениями (3.21) – (3.24).

Каждое решение задачи (3.25) при фиксированном $\delta > 0$ будем называть обобщенным δ-решением задачи (2.1) или обобщенным приближенным решением задачи (2.1) с внешними и внутренними возмущениями. Каждое решение задачи (3.26) будем называть обобщенным экстремальным δ-решением задачи (2.1) или обобщенным приближенным экстремальным решением задачи (2.1) с внешними и внутренними возмущениями. При каждом $\delta > 0$ обозначим через $H_{\eta(\delta),\omega(\delta)}(U)$ ($H_{\mathrm{ext},\eta(\delta),\omega(\delta)}(U)$) множество решений задачи (3.25), (3.26), принадлежащих множеству $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$. Так как для любого $\delta > 0$ и любого $x \in U$ выполняется включение $(\widetilde{\Phi}_{\mathrm{ext},\eta,\omega})(x,\delta) \subset \widetilde{\Phi}_{\eta,\omega}(x,\delta)$, то для любого $\delta > 0$ справедливо вложение $H_{\mathrm{ext},\eta(\delta),\omega(\delta)}(U) \subset H_{\eta(\delta),\omega(\delta)}(U)$.

Т е о р е м а 14. *Пусть множество $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ обладает свойством $\mathcal{D}$. Тогда для любых $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$, $\omega(\cdot,\cdot) \in P(\mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty))$ справедливы равенства*

$$H_{\mathrm{co}}(x_0,b) = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\mathrm{ext},\eta(\delta),\omega(\delta)}(U)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta),\omega(\delta)}(U)}, \tag{3.27}$$

где $\overline{H_{\mathrm{ext},\eta(\delta),\omega(\delta)}(U)}$, $\overline{H_{\eta(\delta),\omega(\delta)}(U)}$ – замыкания в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ множеств решений $H_{\mathrm{ext},\eta(\delta),\omega(\delta)}(U)$, $H_{\eta(\delta),\omega(\delta)}(U)$ соответственно.

З а м е ч а н и е 16. Теорема 14 устанавливает, что никакая точность вычислений значений отображения $F : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающего овыпукленный по переключению оператор $\widetilde{\Phi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенный равенством (1.8), не гарантирует «восстановление» множества $\overline{H(x_0,b)}$ по замыканиям в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ множеств обобщенных приближенных решений задачи (2.1) с внутренними и внешними возмущениями. Это возможно только в одном случае, когда выполняется принцип плотности для обобщенных решений.

4. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями

Здесь рассматриваются функционально-дифференциальные включения с вольтерровым по А.Н. Тихонову многозначным отображением и импульсными воздействиями. Формулируются теоремы о продолжаемости решений и устанавливается связь априорной ограниченности решений с глобальной разрешимостью, а также формулируются утверждения о принципе плотности и «бэнг-бэнг» принципе для таких систем. Отметим, что дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями исследовались в работах [37–39]. *Некоторые вопросы теории функционально-дифференциальных включений с импульсными воздействиями рассматривались в работе* [40].

Пусть $t_k \in [a,b]$ $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$, $\widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b]$ – множество неотрицательных функций пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a,b]$. Если $\tau \in (a,b]$, то $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ – это пространство функций $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$, являющихся сужениями на отрезок $[a,\tau]$ элементов из $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,\tau]\}$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi(x); \tag{4.1}$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)),\ k = 1, \ldots, m; \tag{4.2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{4.3}$$

где полунепрерывное снизу отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$ непрерывны, $\Delta x(t_k) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1,2,...,m$.

О п р е д е л е н и е 16. Под *решением задачи* (4.1) – (4.3) будем понимать функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такое $q \in \Phi(x)$, что функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)ds + \sum_{t_k \in [a,b]} \chi_{(t_k,b]}(t) \Delta x(t_k), \tag{4.4}$$

где $\Delta x(t_k)$, $k = 1,2,...,m$, удовлетворяют равенствам (4.2).

Далее предположим, что оператор $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ (правая часть включения (4.1)) вольтерров (см. определение 6).

О п р е д е л е н и е 17. Будем говорить, что функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ *является решением задачи* (4.1) – (4.3) *на отрезке* $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$, если существует такое $q \in (\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$, что функция $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$ представима в виде (4.4), где $t_k \in [a,\tau]$, а непрерывное отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ определено равенством (2.3).

Далее, будем говорить, что функция $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ *является решением задачи* (4.1) – (4.3) *на* $[a,c)$, если для любого $\tau \in (a,c)$ сужение $x|_\tau \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ и найдется такая функция $q : [a,c) \to \mathbb{R}^n$, что для любого $\tau \in (a,c)$, $q|_\tau \in (\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$ и для любого $t \in [a,c)$ имеет место представление (4.4), где $t_k \in [a,c)$.

Решение $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (4.1) – (4.3) на $[a,c)$ будем называть *непродолжаемым*, если не существует такого решения y задачи (4.1) – (4.3) на $[a,\tau]$ (здесь $\tau \in (c,b]$, если $c < b$, и $\tau = b$, если $c = b$), что для любого $t \in [a,c)$ выполняется равенство $x(t) = y(t)$. Решение задачи (4.1) – (4.3) считается непродолжаемым.

Т е о р е м а 15. *Найдется такое* $\tau \in (a,b]$, *что решение задачи* (4.1) – (4.3) *существует на отрезке* $[a,\tau]$.

Т е о р е м а 16. *Для того чтобы решение* $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ *задачи* (4.1) – (4.3) *было продолжаемым на некоторый отрезок* $[a,\tau]$, $\tau \in (c,b]$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\overline{\lim_{t \to c-0}} |x(t)| < \infty$.

Т е о р е м а 17. *Если* y *– решение задачи* (4.1) – (4.3) *на* $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b)$, *то существует непродолжаемое решение задачи* (4.1) – (4.3) *либо на* $[a,c)$, $c \in (\tau,b]$, *либо на* $[a,b]$, *такое, что при любом* $t \in [a,\tau]$ *выполнено равенство* $x(t) = y(t)$.

Пусть $\widetilde{H}(x_0,\tau)$ – множество всех решений задачи (4.1) – (4.3) на отрезке $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$.

О п р е д е л е н и е 18. Будем говорить, что множество всех локальных решений задачи (4.1) – (4.3) *априорно ограниченно*, если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a,b]$ не существует решения $y \in \widetilde{H}(x_0,\tau)$, для которого выполняется неравенство $||y||_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} > r$.

Т е о р е м а 18. *Пусть множество всех локальных решений задачи* (4.1) – (4.3) *априорно ограниченно. Тогда для любого* $\tau \in (a,b]$ *множество* $\widetilde{H}(x_0,\tau) \neq \varnothing$ *и существует такое* $r > 0$, *что для каждых* $\tau \in (a,b]$ *и* $y \in \widetilde{H}(x_0,\tau)$ *выполняется неравенство* $||y||_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} \leqslant r$.

О п р е д е л е н и е 19. Будем говорить, что отображения $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ и $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,m$, *обладают свойством* $\mathcal{F}$, если найдется изотонный непрерывный вольтерров оператор $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b] \to \mathbf{L}_+^1[a,b]$ и неубывающие непрерывные функции $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}_+^1$, $k = 1,2,\ldots,m$, для которых справедливы условия: для любой функции $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и произвольного измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство $\|\Phi(x)\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant \|\Gamma(Zx)\|_{L_1^1(\mathcal{U})}$; для любого $k = 1,2,\ldots,m$ и произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место оценка $|I_k(x)| \leqslant \widetilde{I}_k(|x|)$; множество всех локальных решений задачи

$$\dot{y} = \Gamma(y), \;\; \Delta y(t_k) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \;\; k = 1,2,\ldots,m, \;\; y(a) = |x_0|$$

априорно ограничено. Здесь непрерывное отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b]$ определено равенством (2.6).

Т е о р е м а 19. *Пусть отображения* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *и* $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,m$, *обладают свойством* $\mathcal{F}$. *Тогда для любого* $\tau \in (a,b]$ *множество* $\widetilde{H}(x_0,\tau) \neq \varnothing$ *и существует такое* $r > 0$, *что для любых* $\tau \in (a,b]$ *и* $y \in \widetilde{H}(x_0,\tau)$ *выполняется неравенство* $\|y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} \leqslant r$.

О п р е д е л е н и е 20. Будем говорить, что множество решений задачи (4.1) – (4.3) *почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений*, если для любого $v \in \mathbf{L}_1^n[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое решение $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ задачи (4.1) – (4.3), что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$||v - q||_{L_1^n(\mathcal{U})} \leqslant \rho_{L_1^n(\mathcal{U})}[v, \Phi(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}), \tag{4.5}$$

где функция $q \in \Phi(x)$ удовлетворяет равенству (4.4).

Т е о р е м а 20. *Пусть множество всех локальных решений задачи* $(4.1)-(4.3)$ *априорно ограничено. И пусть отображение* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *непрерывно по Хаусдорфу. Тогда множество решений задачи* $(4.1)-(4.3)$ *почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений. Если* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b]))$, то множество решений задачи $(4.1)-(4.3)$ *реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.*

О п р е д е л е н и е 21. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,m$, *обладают свойством* $\mathcal{G}$, если для каждого $k = 1,2,\ldots,m$, найдется такая непрерывная неубывающая функция $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}_+^1$, удовлетворяющая равенству $\widetilde{I}_k(0) = 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leqslant \widetilde{I}_k(|x - y|). \tag{4.6}$$

О п р е д е л е н и е 22. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,m$, и отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладают свойством* $(\Gamma^{u,\varepsilon,p}; \widetilde{I}_k, k = 1,2,\ldots,m)$, если импульсные воздействия I_k, $k = 1,2,\ldots,m$, обладают свойством $\mathcal{G}$ и если найдется изотонный непрерывный вольтерров оператор $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b] \to \mathbf{L}_+^1[a,b]$, удовлетворяющий условиям: $\Gamma(0) = 0$, для любых функций $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\Phi(x);\; \Phi(y)] \leqslant ||\Gamma(Z(x - y))||_{\mathbf{L}_1^1(\mathcal{U})};$$

множество всех локальных решений задачи

$$\dot{y} = u + \varepsilon + \Gamma(y), \;\; \Delta y(t_k) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \;\; k = 1,2,\ldots,m, \;\; y(a) = p \tag{4.7}$$

априорно ограничено. Здесь непрерывное отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ определено равенством (2.6), отображение $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k = 1,2,\ldots,m$, удовлетворяет неравенству (4.6), $u \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$, числа $\varepsilon, p \geqslant 0$.

Пусть для функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует такая функция $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n_1[a,b]$, что для любого $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$y(t) = y(a) + \int_a^t \widetilde{q}(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta y(t_k), \tag{4.8}$$

где $\Delta y(t_k)$, $k = 1,2,\ldots,m$, удовлетворяет равенству (4.2). Пусть для функции $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ справедливо соотношение

$$\rho_{\mathbf{L}^n_1(\mathcal{U})}[\widetilde{q},\ \Phi(y)] \leqslant \int_{\mathcal{U}} \varkappa(s)ds, \tag{4.9}$$

где функции $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n_1[a,b]$ и $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ удовлетворяют равенству (4.8).

Т е о р е м а 21. *Пусть для функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ имеет место представление (4.8) и функция $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству (4.9). Далее, пусть импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,m$, и отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n_1[a,b])$ обладают свойством $(\Gamma^{u,\varepsilon,p}; \widetilde{I}_k, k = 1,2,\ldots,m)$, где $\varepsilon \geqslant 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0 – начальное условие задачи (4.1) – (4.3). Тогда для любого решения $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ задачи (4.1) – (4.3), удовлетворяющего для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ неравенству (4.5), в котором функция $q \in \mathbf{L}^n_1[a,b]$ из представления (4.4), а функция $v = \widetilde{q}$ из соотношения (4.8), при любом $t \in [a,b]$ имеет место оценка*

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \xi(\varkappa,\varepsilon,p)(t) \tag{4.10}$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо соотношение

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leqslant \varkappa(t) + \varepsilon + (\Gamma(\xi(\varkappa,\varepsilon,p)))(t), \tag{4.11}$$

где $\xi(\varkappa,\varepsilon,p) \in \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ – *верхнее решение задачи* (4.7) *при* $u = \varkappa$ *и* $p = |x_0 - y(a)|$.

Из теорем 6, 7 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 22. *Пусть для функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ имеет место представление (4.8) и функция $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству (4.9). Далее, пусть импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,m$, и отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n_1[a,b])$ обладают свойством $(\Gamma^{\varkappa,\varepsilon,p}; \widetilde{I}_k, k = 1,2,\ldots,m)$, где $\varepsilon \geqslant 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0 – начальное условие задачи (4.1) – (4.3) и множество всех локальных решений задачи (4.1) – (4.3) априорно ограничено. Тогда при $\varepsilon > 0$ существует решение $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ задачи (4.1) – (4.3), для которого при всех $t \in [a,b]$ справедлива оценка (4.10) и при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется соотношение (4.11).*

Если $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\Pi(\mathbf{L}^n_1[a,b]))$, то утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$.

О п р е д е л е н и е 23. Будем говорить, что функция $y \in \mathbf{C}^n[a,b]$, имеющая представление (4.8), в котором $y(a) = x_0$, является *квазирешением задачи* (4.1) – (4.3), если найдется такая последовательность $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $i = 1,2,\ldots$, что для каждой функции x_i, $i = 1,2,\ldots$, найдется функция $q_i \in \Phi(y)$, для которой при любом $t \in [a,b]$ имеет место равенство

$$x_i(t) = \int_a^t q_i(s)ds + x_0 + \sum_{k=1}^{m} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta x_i(t_k),$$

где $\Delta x_i(t_k)$ удовлетворяет равенству (4.2), и $x_i \to y$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{H}}(x_0)$ – множество всех квазирешений задачи (4.1) – (4.3).

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \overline{\text{co}}\,\Phi(x), \ \ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), \ \ k = 1,2,\ldots,m, \ \ x(a) = x_0. \tag{4.12}$$

Пусть $\widetilde{H}_{\text{co}}(x_0,\tau)$ – множество всех решений задачи (4.12) на отрезке $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$.

Т е о р е м а 23. *Справедливо равенство* $\widetilde{\mathcal{H}}(x_0) = \widetilde{H}_{\text{co}}(x_0,b)$.

О п р е д е л е н и е 24. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,m$, и отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладают свойством* $\mathcal{K}$, если выполняется свойство $(\Gamma^{0,0,0}; \widetilde{I}_k, k = 1,2,\ldots,m)$, а задача $\dot{y} = \Gamma(y)$, $y(a) = 0$ на каждом отрезке $[a,\tau]$ $(\tau \in (a,b])$ имеет только нулевое решение.

Т е о р е м а 24. *Пусть множество всех локальных решений задачи* (4.1) – (4.3) *априорно ограничено. Далее, пусть импульсные воздействия* $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,m$ *и отображение* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Pi(\mathbf{L}^n[a,b])$ *обладают свойством* $\mathcal{K}$. *Тогда* $\widetilde{H}(x_0,b) \neq \varnothing$ *и справедливо равенство*

$$\overline{\widetilde{H}_{(x_0,b)}} = \widetilde{H}_{\text{co}}(x_0,b), \tag{4.13}$$

где $\overline{\widetilde{H}_{(x_0,b)}}$ *– замыкание множества* $\widetilde{H}(x_0,b)$ *в пространстве* $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$.

Таким образом, теорема 24 дает достаточные условия выполнения принципа плотности [12] для задачи (4.1) – (4.3). Равенство (4.13) можно усилить следующим образом.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \overline{\text{ext}}(\overline{\text{co}}\,\Phi(x)), \ \ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), \ \ k = 1,2,\ldots,m, \ \ x(a) = x_0. \tag{4.14}$$

Пусть $\widetilde{H}_{\text{ext}}(x_0,\tau)$ – множество всех решений задачи (4.14) на отрезке $[a,\tau]$ $(\tau \in (a,b])$.

Т е о р е м а 25. *Пусть выполнены условия теоремы 24. Тогда* $\widetilde{H}_{\text{ext}}(x_0,b) \neq \varnothing$ *и справедливо равенство*

$$\overline{\widetilde{H}_{\text{ext}}(x_0,b)} = \widetilde{H}_{\text{co}}(x_0,b),$$

где $\overline{\widetilde{H}_{\text{ext}}(x_0,b)}$ *– замыкание множества* $\widetilde{H}_{\text{ext}}(x_0,b)$ в *пространстве* $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$.

Таким образом, для задачи (4.1) – (4.3) выполняется не только принцип плотности, но и «бэнг-бэнг» принцип.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00305), темплана 1.6.07 Рособразования, Норвежской национальной программы научных исследований FUGE при Совете научных исследований Норвегии и Норвежского Комитета по развитию университетской науки и образования (NUFU), грант PRO 06/02, а также при финансовой поддержке CIGENE – Center for Integrative Genetics at Norwegian University of Life Sciences and the Norwegian Research Council и финансовой поддержке Lanekassen – Norwegian State Educational Loan Fund.

Список литературы

1. Булгаков, А.И. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений / А.И Булгаков, Л.И. Ткач // Мат. сб. – 1998. – Т. 189, № 6. – С. 3–32.

2. Булгаков, А.И. Возмущение однозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами / А.И Булгаков, Л.И. Ткач // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 3. – С. 3–16.

3. Булгаков, А.И. Ассимптотическое представление мрожеств δ-решений включения типа Гаммерштейна / А.И. Булгаков, Л.И. Ткач // Вестн. Тамб. гос. ун-та им. Г.Р. Державина. Сер. Естеств. и техн. науки. – 1997. – Т. 2, вып. 3. – С. 294–298.

4. Булгаков, А.И. К теории возмущенных включений и ее приложениям / А.И. Булгаков , О.П. Беляева, А.А. Григоренко // Мат. сб. – 2005. – Т. 196, № 10. – С. 21–78.

5. Булгаков А.И. Обыкновенные дифференциальные включения с внутренними и внешними возмущениями / А.И. Булгаков, А.А. Ефремов, Е.А. Панасенко // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 1587–1998.

6. Булгаков, А.И. Аппроксимация дифференциальных включений / А.И. Булгаков, В.В. Скоморохов // Мат. сб. – 2002. – Т. 193, № 2. – С. 35–52.

7. Wazewski, T. Sur une generalisation de la notion des solutions d'une equation au contingent / T. Wazewski // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. Astron. Phys. – 1962. – V. 10, № 1. – P. 11–15.

8. Благодатских В.И. Дифференциальные включения и оптимальное управоение / В.И. Благодатских, А.Ф. Филиппов // Тр. МИАН СССР. – 1985. – Т. 169. – С. 194–252.

9. Bressan, A. On a bang-bang principle for nonlinear systems / A. Bressan // Boll. Unione Math. Italiana. Supp l. – 1980. – № 1. – P. 53–59.

10. Филиппов, А.Ф. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью / А.Ф. Филиппов // Вестн. Моск. ун-та. – 1967. – № 3. – С. 16–26.

11. Ирисов, А.Е. Замыкание множества периодических решений дифференциальных включений / А.Е. Ирисов, Е.Л. Тонков // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Горький, 1983. – С. 32–38.

12. Pianigiani, G. On the fundamental theory of multivalued differential equations / G. Pianigiani // J. Different. Equations. – 1977. – V. 25, № 1. – P. 30–38.

13. Ляпин, Л.Н. Обеспечение оптимальной программы контроля на множестве функциональных структур / Л.Н. Ляпин, Ю.Л. Муромцев // Автомат. телеупр. – 1993. – Т. 24, № 3. – С. 85–93.

14. Branicky, M.A. Unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory / M. Branicky, V. Borkar, S. Mitter // IEEE Trans. Aut. Control. – 1993. – V. 43, № 1. – P. 31–45.

15. Brockett, R.W. Hybrid Models for Motion Control Systems / R.W. Brockett, H. Trentelman, J.C. Willems // Assays in Control: Perspectives in the Theory and its Applications. – Boston, MA : Birkhäuser, 1993. – P. 29–54.

16. Lygeros, J. Controllers for reachability specifications for hybrid systems / J. Lygeros, C. Tomlin, S. Sastry // Automatica: Special issue on hybrid systems. – 1999. – № 35. – P. 349–370.

17. Тихонов, А.Н. Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секция А. – 1938. – Т. 1, № 8. – С. 1–25.

18. Van, A.J. An Introduction to Hybrid Dynamical Systems / A.J. Van der Schaft, J.M. Schumacher, Springer Lect // Notes in Control and Information Sciences. – London, 2000. – V. 251. – P. 35–57.

19. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 219 с.

20. Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М. : Наука, 1974. – 480 с.

21. Булгаков, А.И. Функционально-дифференциальное включение с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений / А.И. Булгаков, О.П. Беляева, А.Н. Мачина // Вестн. Удм. ун-та. Сер. Математика. – 2005. – № 1. – С. 3–20.

22. Самойленко, А.М. Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. – Киев : Выща школа, 1987. – 370 с.

23. Kamenskii, M. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. – New-York : Walter de Gruyter, – 2001. – 370 p.

24. Толстоногов, А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве / А.А. Толстоногов. – Новосибирск : Наука, 1986. – 310 с.

25. Bressan, A. Extensions and selections of maps with decomposable values / A. Bressan, G. Colombo // Studia. math. – 1988. – V. 90, № 1. – P. 69–86.

26. Fryszkowski, A. Continuous selection for a class of non-convex multivalued maps / A. Fryszkowski // Stud. Math. – 1983. – V. 76, № 2. – P. 163–174.

27. Plis, A. Trajectories and quasitrajectories of an orientor field / A. Plis // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. math. Astron. Phys. – 1963. – V. 11, № 6. – P. 369–370.

28. Turowicz, A. Remarque sur la definition des quasitrajectoires d'un system de commande nonlineaire / A. Turowicz // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. math., astr., phys. – 1963. – V. 11, № 6. – P. 367–368.

29. Булгаков, А.И. Интеграьные включения с невыпуклыми образами и их приложения к краевым задачам дифференциальных включений / А.И. Булгаков // Мат. сб. – 1992. – Т. 183, № 10. – С. 63–86.

30. Булгаков, А.И. Функционально-дифференциальные включения с оператором, обладающим невыпуклыми образами / А.И. Булгаков // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 10. – С. 1659–1668.

31. Булгаков, А.И. Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения / А.И. Булгаков // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т 28, № 3. – С. 371–379 ; Т. 28, № 4. – С. 566–571 ; Т. 28, № 5. – С. 739–746.

32. Толстоногов, А.А. О множестве решений дифференциального включения в банаховом пространстве / А.А. Толстоногов, П.И. Чугунов // Сиб. мат. журн. – 1983. – Т. 24, № 6. – С. 144–159.

33. Толстоногов, А.А. О решениях дифференциального включения с полунепрерывной снизу невыпуклой правой частью в банаховом пространстве / А.А. Толстоногов, И.А. Финогенко // Мат. сб. – 1984. – Т. 125, № 2. – С. 199–130.

34. Hajek, O. Discontinuous differential equations. I, II / O. Hajek // Journ. of Dif. Equat. – 1979. – V. 32, № 2. – P. 149–170, 171–185.

35. Hermes, H. The generalized differential equation (t) $\in$ R(t, x) / H. Hermes // Adv. Math. – 1970. – V. 4, № 2. – P. 149–169.

36. Hermes, H. On continuous and measurable selections and the existence of solutions of generalized differential equations / H. Hermes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 29, № 3. – P. 535–542.

37. Завалищин, С.Т. Импульсные процессы. Модели и приложения / С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин. – М. : Наука, 1991. – 446 с.

38. Азбелев, Н.В. Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. – М. : Высшая школа, 1987. – 384 с.

39. Булгаков, А.И. К теории функционально-дифференциальных включений с импульсными воздействиями / А.И. Булгаков, А.И. Коробко, О.В. Филиппова // Вестн. Удм. ун-та. Сер. Математика. – 2008. – Вып. 2. – С. 24–27.

40. Булгаков, А.И. Некоторые вопросы функционально-дифференциальных включений с импульсными воздействиями / А.И. Булгаков, А.И. Коробко, О.В. Филиппова // Вестн. Тамб. гос. ун-та им. Г.Р. Державина. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2007. – Т. 12, № 4. – С. 414–418.

41. Булгаков, А.И. Функционал и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами / А.И. Булгаков, В.П. Максимов // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 8, № 8. – С. 881–890.

42. Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменой / И.П. Натансон. – М. : Наука, 1974. – 480 с.

43. Machina, A.A. Generalized Solutions of Functional Differential Inclusions / A.H. Machina, A.И Bulgakov, A.H Grigorenko // Abstract and Applied Analysis. – 2008. – V. 2008. – P. 1–35.