УДК 517.925.52

ОБ ОБОБЩЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КАРАТЕОДОРИ

А.П. Афанасьев[1], С.М. Дзюба[2], Ю.Е. Репина[2]

Институт системного анализа РАН, г. Москва (1);
Кафедра «Распределенные вычислительные системы» (2), ГОУ ВПО «ТГТУ»

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: дифференциальные уравнения типа Каратеодори; минимальные множества; обобщенно-периодические решения.

Аннотация: Вводится определение обобщенно-периодического решения дифференциального уравнения типа Каратеодори. Устанавливается существование таких решений. Показано, что каждое решение, содержащееся в минимальном множестве, является обобщенно-периодическим.

---

1. Введение

Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений типа Каратеодори

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

где $x \in \boldsymbol{R}^n$ – векторная функция действительного переменного t, а $f(t, x)$ – векторная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

a) $f(t, x)$ при почти всех t определена и непрерывна по x;

b) функция $f(t, x)$ измерима по t при каждом x;

c) функция $f(t, x)$ периодична по t с периодом T.

Вопрос о существовании у системы (1) периодических решений весьма важен как для собственно теории дифференциальных уравнений, так и для ее приложений. Одним из основных результатов здесь является следующее утверждение, принадлежащее Х.Л. Массера [3]. Пусть порядок n системы (1) равен двум и каждое решение $\xi(t)$ этой системы определено для всех значений $t \geq 0$. Тогда если система (1) имеет некоторое решение, ограниченное при этих значениях t, то данная система имеет также и периодическое решение $\varphi(t)$ периода, равного T.

В многомерном нелинейном случае, как считалось до недавнего времени, из существования у системы (1) ограниченного решения следует существование только лишь инвариантного интегрального множества (см., например, [5]). Однако, как показано в книге [1], каждое компактное инвариантное интегральное множество содержит решения, которые здесь будем называть обобщенно-периодическими*. Более того, оказалось, что именно обобщенно-периодические решения определяют ситуацию типического поведения в дифференциальных

---

* В книге [1] эти решения называются равномерно устойчивыми по Пуассону, что выглядит слишком громоздко.

уравнениях с гладкой непрерывной правой частью. Целью настоящей работы является обобщение основных результатов гл. 4 книги [1] на дифференциальные уравнения типа Каратеодори, в которых единственность решений не предполагается.

2. Основная лемма

Прежде всего, сформулируем и докажем лемму, на которой будут базироваться все дальнейшие построения.

Лемма. *Пусть* $\xi(t)$ *– абсолютно непрерывное решение системы* (1)*, определенное при* $t \ge 0$ *и ограниченное при* $t \to +\infty$. *Тогда из каждой последовательности*

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, \qquad \lim_{k \to +\infty} N_k = +\infty, \tag{2}$$

натуральных чисел можно выбрать такую ее подпоследовательность

$$N_{k_1},\ N_{k_2}, \ldots,\ N_{k_l}, \ldots, \qquad \lim_{l \to +\infty} N_{k_l} = +\infty,$$

что

$$\lim_{l \to +\infty} \xi\big(t + (N_{k_l} - 1)T\big) = \varphi(t) \tag{3}$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset \boldsymbol{R}^+$ *и*

$$\lim_{l \to +\infty} \varphi\big(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T\big) = \varphi(t) \tag{4}$$

равномерно на $\boldsymbol{R}^+$, *где* $\varphi(t)$ *– абсолютно непрерывное решение системы* (1), *определенное на* $\boldsymbol{R}^+$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое положительное число T. Для всех значений $t \in \boldsymbol{R}^+$ и $N = 1, 2, 3\ldots$ положим

$$\xi_1(t) = \xi_0 + \int_0^t f(\tau, \xi_N(\tau))\, d\tau. \tag{5}$$

Тогда

$$\xi_N(t) = \xi_1\big(t + (N-1)T\big) = \xi_N(0) + \int_0^t f(\tau, \xi_N(\tau)) d\tau. \tag{6}$$

Пусть (2) – произвольная последовательность натуральных чисел. В соответствии с (2) из множества (6) выберем последовательность

$$\xi_{N_1}, \xi_{N_2}, \ldots, \xi_{N_k}, \ldots \tag{7}$$

Так как решение $\xi(t)$ ограничено при $t \ge 0$, то последовательность (7) равномерно ограничена на произвольном отрезке $[a, b] \subset \boldsymbol{R}^+$.

Семейство $\{\xi_{N_k}\}$ абсолютно непрерывно, поэтому без какой-либо потери общности можем считать, что функция $f\big(t, \xi_{N_k}(t)\big)$ ограничена на $[0,T]$. Поэтому последовательность (7) равностепенно непрерывна (см. [4, с. 9]). Поэтому согласно второй и третьей теореме Асколи [5] из (7) можно выбрать последовательность

$$\xi_{N_{k_1}}, \xi_{N_{k_2}}, ..., \xi_{N_{k_l}}, ... , \tag{8}$$

которая на каждом из отрезков $[a,b] \subset \boldsymbol{R}^+$ равномерно сходится к функции $\varphi(t)$, определенной и непрерывной на всей полуоси $\boldsymbol{R}^+$. Поскольку функция f непрерывна по ξ, без какой-либо потери общности можно считать

$$\lim_{l \to +\infty} f\left(t, \xi_{N_{k_l}}(t)\right) = f(t, \varphi(t))$$

почти для всех $t \in [a,b]$. Но решение $\xi(t)$ по условию ограничено, поэтому последовательность

$$\int_a^b f\left(t, \xi_{N_{k_1}}(t)\right) dt, \int_a^b f\left(t, \xi_{N_{k_2}}(t)\right) dt, \ldots, \int_a^b f\left(t, \xi_{N_{k_l}}(t)\right) dt, \ldots$$

также ограничена. Согласно лемме Фату [2], предельная функция $f(t, \varphi(t))$ суммируема на $[a,b]$ и, более того,

$$\lim_{l \to +\infty} \int_a^b f\left(t, \xi_{N_{k_l}}(t)\right) dt = \int_a^b f(t, \varphi(t)) dt .$$

Другими словами, $\varphi(t)$ является решением системы (1), целиком содержащимся в ω-предельном множестве $\Omega(\xi)$ решения $\xi(t)$,

$$\Omega(\xi) = \bigcap_{t \ge 0} \overline{\bigcup_{\tau \ge t} \xi(t_0 + \tau)} .$$

Для простоты обозначений будем считать, что выбранная подпоследовательность (8) совпадает с последовательностью (7). Поэтому для всех значений $t \in \boldsymbol{R}^+$ можем записать равенство

$$\lim_{k \to +\infty} \xi_{N_k}(t) = \varphi(t) , \tag{9}$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a,b] \subset \boldsymbol{R}^+$.

Пусть

$$\Delta(N_1), \Delta(N_2), \ldots, \Delta(N_k), \ldots$$

– множество, элементы которого при всех N_k из (2) определены по формуле

$$\Delta(N_k) = N_{k+1} - N_k .$$

При этом будем считать, что

$$\lim_{k \to +\infty} \Delta(N_k) = +\infty .$$

Последнего всегда можно добиться, удалив из множества (2) соответствующие элементы при сохранении его счетности.

Поскольку для всех значений N_k имеем

$$\xi_{N_{k+1}}(0) = \xi_{N_k}(\Delta(N_k)T),$$

то

$$\varphi(0) = \lim_{k \to +\infty} \xi_{N_k}(\Delta(N_k)T).$$

Более того, так как решение $\varphi(t)$ содержится во множестве $\Omega(\xi)$, а множество $\Omega(\xi)$ по построению компактно, без какой-либо потери общности можно считать, что существует предел

$$\lim_{k \to +\infty} \varphi(\Delta(N_k)T) = \varphi_0, \tag{10}$$

где φ_0 – некоторая точка множества $\Omega(\xi)$.

Если $\varphi_0 \neq \varphi(0)$, то в силу условий (9) и (10) найдутся такие положительное число ε и натуральное число k_0, зависящее от ε, что

$$\left|\xi_{N_k}(\Delta(N_k)T) - \varphi(\Delta(N_k)T)\right| \geq \varepsilon$$

при $k > k_0$. Поэтому для всех значений $k > k_0$ справедливо неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T}\left|\xi_{N_k}(t + \Delta(N_k)T) - \varphi(t + \Delta(N_k)T)\right| \geq \varepsilon. \tag{11}$$

Обозначим через M множество функций

$$\varphi(t),\ \varphi(t + T),\ \ldots,\ \varphi(t + NT),\ \ldots, \tag{12}$$

определенных на отрезке $[0,T]$. Поскольку множество $\Omega(\xi)$ компактно, то, действуя по аналогии с доказательством равностепенной непрерывности последовательности (7), в силу соотношения

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau))d\tau \tag{13}$$

несложно показать, что множество M равностепенно непрерывно на $[0,T]$. Поэтому согласно компактности Ω замыкание $\overline{M}$ множества M – компактное в топологии равномерной сходимости на $[0,T]$ множество, по первой теореме Асколи еще и равностепенно непрерывное на этом отрезке (см., например, [1, 6]).

Для всех значений $t \in [0,T]$ положим

$$x(t) = \lim_{k \to +\infty} \xi_{N_k}(t + \Delta(N_k)T), \tag{14}$$

причем в силу ограниченности при $t \geq 0$ решения $\xi(t)$ можем принять существование такого предела. Пусть при этом

$$t_k = (\Delta(N_k) + 1)T, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Тогда, согласно неравенству (11), для всех значений $k > k_0$ справедливо также и неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq t_k}\left|\xi_{N_k}(t) - \varphi(t)\right| \geq \varepsilon.$$

Обозначим через k_1 некоторое натуральное число, удовлетворяющее условию $k_1 > k_0$. Тогда

$$\max_{0 \le t \le t_{k_1}} \left| \xi_{N_{k_1}}(t) - \varphi(t) \right| \ge \varepsilon.$$

Более того, найдутся такие положительное число $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и натуральное число $k_2 > k_1$, что

$$\max_{0 \le t \le t_{k_1}} \left| \xi_{N_{k_2}}(t) - \varphi(t) \right| < \varepsilon_1 .$$

Тогда, как и ранее,

$$\max_{0 \le t \le t_{k_2}} \left| \xi_{N_{k_2}}(t) - \varphi(t) \right| \ge \varepsilon,$$

причем найдутся такие положительное число $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и натуральное число $k_3 > k_2$, что

$$\max_{0 \le t \le t_{k_2}} \left| \xi_{N_{k_3}}(t) - \varphi(t) \right| < \varepsilon_2 .$$

Продолжая действовать аналогичным образом, несложно построить такие последовательности

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \quad \lim_{l \to +\infty} \varepsilon_l = 0,$$

положительных и

$$k_1, k_2, \ldots, k_l, \ldots, \quad \lim_{l \to +\infty} k_l = +\infty,$$

натуральных чисел, что выполняются неравенства

$$\max_{0 \le t \le t_{k_l}} \left| \xi_{N_{k_l}}(t) - \varphi(t) \right| \ge \varepsilon, \tag{15}$$

$$\max_{0 \le t \le t_{k_l}} \left| \xi_{N_{k_{l+1}}}(t) - \varphi(t) \right| < \varepsilon_l . \tag{16}$$

Заметим теперь, что объединение

$$\bigcup_{l=1}^{+\infty} \left[0, t_{k_l} \right]$$

расширяющихся отрезков $\left[0, t_{k_1}\right] \subset \left[0, t_{k_2}\right] \subset \ldots \subset \left[0, t_{k_l}\right] \subset \ldots$ исчерпывает всю полуось $[0, +\infty)$, а на каждом из этих отрезков $\left[0, t_{k_l}\right]$ выполнены неравенства (15) и (16). Поэтому в силу условия (11) видно, что $x \notin \overline{M}$. Последнее, однако, противоречит равенствам (9) и (13). Отсюда следует, что

$$\varphi(0) = \lim_{k \to +\infty} \varphi\left(\Delta(N_k) T\right)$$

и, значит, в силу соотношений (9) для всех значений $t \in \boldsymbol{R}^+$ справедливо равенство

$$\varphi(t) = \lim_{k \to +\infty} \varphi\big(t + \Delta(N_k)T\big), \tag{17}$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a,b] \subset \boldsymbol{R}^+$.

Обозначим через F множество, состоящее из функций множества $\overline{M}$, продолженных вдоль движения $\varphi(t)$ на пополнение $\overline{\boldsymbol{R}}^+$ полуоси $\boldsymbol{R}^+$. Поскольку множество $\overline{M}$ равностепенно непрерывно на отрезке $[0,T]$, множество F равностепенно непрерывно на $\overline{\boldsymbol{R}}^+$. Но множество $\overline{\boldsymbol{R}}^+$ компактно. Поэтому в силу второй теоремы Асколи отсюда следует, что равномерная сходимость в равенстве (17) имеет место на всей полуоси $\boldsymbol{R}^+$.

Таким образом, лемма доказана.

3. Обобщенно-периодические решения и минимальные множества

Введем следующее определение.

Определение. Пусть $\varphi(t)$ – некоторое решение системы (1), определенное для всех значений $t \in \boldsymbol{R}^+$ и ограниченное при этих значениях t. Будем говорить, что $\varphi(t)$ – обобщенно-периодическое решение, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число N, что при $t \in \boldsymbol{R}^+$ выполнено неравенство

$$\left|\varphi(t) - \varphi(t + NT)\right| < \varepsilon .$$

Простейшим примером обобщенно-периодического решения может служить периодическое решение. В качестве менее тривиального примера отметим иррациональную обмотку тора, а также любое другое почти периодическое решение (см., например, [1]).

Существование и основное свойство обобщенно-периодических решений устанавливает следующая теорема.

Теорема. Пусть $\varphi(t)$ – некоторое решение системы (1), определенное для всех значений $t \in \boldsymbol{R}^+$ и ограниченное при этих значениях t, и пусть M – множество, задаваемое формулой (12). Тогда, если замыкание $\overline{M}$ множества M – минимальное множество, то $\varphi(t)$ – обобщенно-периодическое решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, заметим, что в силу леммы найдется такая последовательность вида (2), что

$$\lim_{k \to +\infty} \varphi\big(t + (N_k - 1)T\big) = \xi(t) \tag{18}$$

равномерно на каждом из отрезков $[a,b] \subset \boldsymbol{R}^+$ и

$$\lim_{k \to +\infty} \xi\big(t + (N_{k+1} - N_k)T\big) = \xi(t) \tag{19}$$

равномерно на всей полуоси $\boldsymbol{R}^+$, где $\xi(t)$ – некоторое обобщенно-периодическое решение.

Предположим, что $\overline{M}$ – минимальное множество. Обозначим через E множество функций

$$\xi(t), \xi(t+T), \ldots, \xi(t+NT), \ldots,$$

определенных на отрезке $[0,T]$. Поскольку $\xi(t)$ – обобщенно-периодическое решение, то в силу леммы несложно заметить, что замыкание $\overline{E}$ множества E – компактное в топологии равномерной сходимости на $[0,T]$ минимальное множество. Но согласно условиям (18) и (19) $\overline{E} \subset \overline{M}$, что в данном случае означает равенство множеств $\overline{E}$ и $\overline{M}$ как минимальных. Следовательно, решение $\varphi(t)$ – обобщенно-периодическое (см. [1, с. 227]).

Замечание. Легко видеть, что в условиях леммы $\varphi(t)$ – обобщенно-периодическое решение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 06-01-00821, 07-07-00170, 08-07-97505).

Список литературы

1. Афанасьев, А.П. Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба. – М. : Изд-во ЛКИ, 2007. – 240 с.
2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1972. – 496 с.
3. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М. : Наука, 1966. – 332 с.
4. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 224 с.
5. Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. – М. : Мир, 1984. – 512 с.
6. Шварц, Л. Анализ. В 2 т. Т. 2 / Л. Шварц. – М. : Мир, 1972. – 528 с.

About Generally Periodical Solutions to Differential Equations of Caratheodory's Type

A.P. Afanasyev[1], S.M. Dzyuba[2], Yu.E. Repina[2]

Institute of System Analysis of RAS, Moscow (1);
Department "Distributed Computational Systems" (2), TSTU

Key words and phrases: differential equations of caratheodory's type; minimal sets; generalized periodic solutions.

Abstract: The paper introduces the notion of generalized periodic solution to the differential equation of caratheodory's type. The existence of such solutions is grounded. It is shown that every solution included in minimal set is generalized periodic.

Über die zusammengefassten periodischen Lösungen der Differentialgleichungen des Karateodorie-Typs

Zusammenfassung: Es wird die Definition der zusammengefassten periodischen Lösung der Differentialgleichung des Karateodorie-Typs eingeführt. Es wird die Existenz solcher Lösungen festgestellt. Es ist gezeigt, dass jede in der minimalen Menge enthaltende Lösung periodisch zusammengefasst ist.

Sur les solutions généralisées et périodiques des équations différentielles du type Karateodori ?

Résumé: Est introduite la définition de la solution généralisée et périodique d'une équation différentielle du type caratheodory. Est établie l'existence de telles solutions. Est montré que chaque solution contenue dans un ensemble minimum est généralisée et périodique.
