УДК 53.082.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПРОЦЕССЕ ХЕМОСОРБЦИИ

П.В. Балабанов, С.В. Пономарев, А.В. Трофимов

Кафедра «Автоматизированные системы и приборы», ГОУ ВПО «ТГТУ»

Ключевые слова и фразы: математическая модель; процесс регенерации воздуха; теплоперенос.

Аннотация: Приведен вывод дифференциального уравнения теплопереноса при движении газовой смеси, содержащей углекислый газ и влагу, через патрон цилиндрической формы, заполненный регенеративным продуктом. Предложены двухмерная и одномерная математические модели теплопереноса в регенеративном патроне цилиндрической формы.

Обозначения

c – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К);	w – локальная скорость потока газа в порах шихты, м/с;
R_0 – радиус обечайки патрона, м;	Q – количество теплоты, Дж;
T – температура, К;	α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2·К);
$T_с$ – температура среды, К;	ε – порозность;
T_0 – начальная температура, К;	λ – теплопроводность, Вт/(м·К);
$T_{вх}(r, \tau)$ – функция распределения температуры во входном сечении патрона, К;	ρ – плотность, кг/м^3;
W – объемная мощность внутренних источников теплоты, Вт/м^3;	ш, г – индексы, обозначающие вещество шихты и газ в порах шихты.

Введение

В практике использования средств регенерации воздуха широко представлены процессы, протекающие в пористых системах (в насыпных слоях зерненых регенеративных продуктов), внутри которых происходят физико-химические превращения, сопровождающиеся выделением теплоты.

Экспериментальные исследования тепловых режимов работы регенеративных продуктов (**РП**) для различных конструкций патронов предполагают значительные затраты материальных ресурсов, что существенно ограничивает возможности проведения таких исследований. Поэтому математическое моделирование процессов теплопереноса в системах патрон–продукт представляется наиболее перспективным.

Дифференциальное уравнение теплопереноса при продувании газовой смеси через регенеративный патрон цилиндрической формы

При выводе дифференциального уравнения теплопроводности допустим, что теплофизические свойства РП (шихты) не зависят от температуры. В действительности, в ходе процесса регенерации происходит ряд химических превращений, в результате которых меняется химический состав исходной шихты. Однако, в определенном интервале температур изменениями теплофизических свойств можно пренебречь в целях упрощения последующего решения краевой задачи теплопроводности.

При выводе дифференциального уравнения теплопереноса использовалась методика, описанная в [1, 2]. Выделим в рассматриваемой среде элементарный параллелепипед объемом $\Delta x \Delta y \Delta z$ (рис. 1). Через левую грань параллелепипеда площадью $\Delta y \Delta z$ за время $\Delta\tau$ проходит количество теплоты

$$Q_x = Q_x^{\text{ш}} + Q_x^{\text{г}} + Q_x^{\text{к}},$$

где $Q_x^{\text{ш}}, Q_x^{\text{г}}$ – количество теплоты, проходящее за счет теплопроводности через частицы шихты и через поры, заполненные газом, расположенные на левой грани; $Q_x^{\text{к}}$ – количество теплоты, проходящее через левую грань за счет конвективного движения потока газа.

Количество теплоты, проходящее через частицы шихты за счет теплопроводности

$$Q_x^{\text{ш}} = q_x^{\text{ш}} \Delta y \Delta z f^{\text{ш}} \Delta\tau,$$

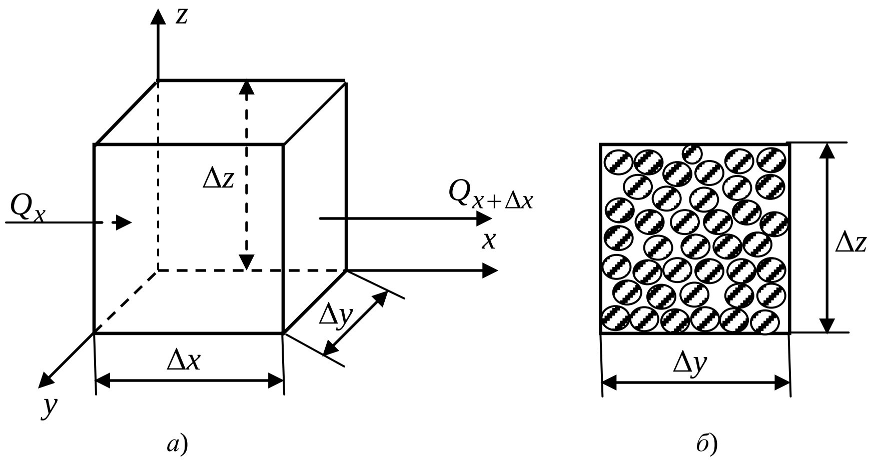
где $q_x^{\text{ш}}$ – тепловой поток, втекающий в левую грань через частицы шихты, расположенные на поверхности левой грани; $f^{\text{ш}}$ – доля площади левой грани, занимаемая частицами шихты.

Количество теплоты, проходящее через левую грань за счет теплопроводности газа, заполняющего поры между частицами шихты

$$Q_x^{\text{г}} = q_x^{\text{г}} \Delta y \Delta z f^{\text{г}} \Delta\tau,$$

где $q_x^{\text{г}}$ – тепловой поток, втекающий в левую грань через поры (заполненные газом), образуемые частицами шихты на поверхности левой грани; $f^{\text{г}} = (1 - f^{\text{ш}})$ – доля площади левой грани, занимаемая порами.

Количество теплоты, проходящее через левую грань за счет движения потока газа



а)   *б*)

Рис. 1. К выводу дифференциального уравнения теплопереноса:
а – элементарный параллелепипед; *б* – левая грань параллелепипеда

$$Q_x^{\text{к}} = w_x c^{\text{г}} \rho^{\text{г}} T_x^{\text{г}} \Delta y \Delta z f^{\text{г}} \Delta\tau,$$

где w_x – локальная скорость потока газа в порах шихты; $c^{\text{г}}$ – удельная теплоемкость газа; $\rho^{\text{г}}$ – плотность газа; $T_x^{\text{г}}$ – температура газа на левой грани.

Аналогично определяем количество теплоты $Q_{x+\Delta x}$, выходящее через правую грань параллелепипеда

$$Q_{x+\Delta x} = Q_{x+\Delta x}^{\text{ш}} + Q_{x+\Delta x}^{\text{г}} + Q_{x+\Delta x}^{\text{к}}$$

или

$$Q_{x+\Delta x} = q_{x+\Delta x}^{\text{ш}} \Delta y \Delta z f^{\text{ш}} \Delta\tau + q_{x+\Delta x}^{\text{г}} \Delta y \Delta z f^{\text{г}} \Delta\tau + w_x c^{\text{г}} \rho^{\text{г}} T_{x+\Delta x}^{\text{г}} \Delta y \Delta z f^{\text{г}} \Delta\tau.$$

Количество теплоты, выделяемое при химической реакции регенерации, равно

$$Q_V = W(x, y, z, \tau) \Delta x \Delta y \Delta z (1-\varepsilon) \Delta\tau,$$

где $W(x, y, z, \tau)$ – объемная мощность внутренних источников теплоты, действующих в единице объема частиц шихты; ε – порозность слоя шихты, вычисляемая по формуле

$$\varepsilon = \left(\Delta x \Delta y \Delta z - V^{\text{ш}}\right) \big/ (\Delta x \Delta y \Delta z),$$

где $V^{\text{ш}}$ – объем, занимаемый частицами шихты в элементарном параллелепипеде.

Таким образом, в элементарном параллелепипеде аккумулируется количество теплоты, равное

$$Q_x - Q_{x+\Delta x} + Q_V = (q_x^{\text{ш}} - q_{x+\Delta x}^{\text{ш}}) \Delta y \Delta z f^{\text{ш}} \Delta\tau + (q_x^{\text{г}} - q_{x+\Delta x}^{\text{г}}) \Delta y \Delta z f^{\text{г}} \Delta\tau +$$
$$+ w_x c^{\text{г}} \rho^{\text{г}} \left(T_x^{\text{г}} - T_{x+\Delta x}^{\text{г}}\right) \Delta y \Delta z f^{\text{г}} \Delta\tau + W(x, y, z, \tau) \Delta x \Delta y \Delta z (1-\varepsilon) \Delta\tau.$$

Разложим функции $q_{x+\Delta x}^{\text{ш}}$, $q_{x+\Delta x}^{\text{г}}$, $T_{x+\Delta x}^{\text{г}}$ в ряды Тейлора

$$q_{x+\Delta x}^{\text{ш}} = q_x^{\text{ш}} + \frac{\partial q_x^{\text{ш}}}{\partial x} dx + \ldots, \quad q_{x+\Delta x}^{\text{г}} = q_x^{\text{г}} + \frac{\partial q_x^{\text{г}}}{\partial x} dx + \ldots, \quad T_{x+\Delta x}^{\text{г}} = T_x^{\text{г}} + \frac{\partial T_x^{\text{г}}}{\partial x} dx + \ldots.$$

Перейдем от конечных приращений к дифференциалам $\Delta \to d$. С учетом разложения в ряд Тейлора запишем выражение для $Q_x - Q_{x+\Delta x} + Q_V$ в следующем виде

$$Q_x - Q_{x+dx} + Q_V = -\frac{\partial q_x^{\text{ш}}}{\partial x} dxdydz f^{\text{ш}} d\tau - \frac{\partial q_x^{\text{г}}}{\partial x} dxdydz f^{\text{г}} d\tau -$$
$$- w_x c^{\text{г}} \rho^{\text{г}} \frac{\partial T_x^{\text{г}}}{\partial x} dxdydz f^{\text{г}} d\tau + W(x, y, z, \tau) dxdydz (1-\varepsilon) d\tau.$$

Согласно закону теплопроводности Фурье [3] $q_x = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$. Поэтому, последнее выражение можно записать в виде

$$Q_x - Q_{x+dx} + Q_V = \lambda^{\text{ш}} \frac{\partial^2 T^{\text{ш}}}{\partial x^2} dxdydz f^{\text{ш}} d\tau + \lambda^{\text{г}} \frac{\partial^2 T^{\text{г}}}{\partial x^2} dxdydz f^{\text{г}} d\tau -$$

$$-w_x c^{\text{г}} \rho^{\text{г}} \frac{\partial T^{\text{г}}}{\partial x} dxdydz\left(1-f^{\text{ш}}\right)d\tau + W(x,y,z,\tau)dxdydz(1-\varepsilon)d\tau.$$

Количество теплоты, аккумулирующееся в элементарном параллелепипеде, можно определить как сумму теплот, аккумулируемых частицами шихты и газом в порах между ними

$$Q^{\text{ш}} + Q^{\text{г}} = c^{\text{ш}} \rho^{\text{ш}} dxdydz(1-\varepsilon)\frac{\partial T^{\text{ш}}}{\partial \tau} d\tau + c^{\text{г}} \rho^{\text{г}} dxdydz\varepsilon \frac{\partial T^{\text{г}}}{\partial \tau} d\tau \,.$$

Таким образом, уравнение теплового баланса для элементарного параллелепипеда можно записать в следующем виде

$$\lambda^{\text{ш}} \frac{\partial^2 T^{\text{ш}}}{\partial x^2} dxdydz f^{\text{ш}} d\tau + \lambda^{\text{г}} \frac{\partial^2 T^{\text{г}}}{\partial x^2} dxdydz f^{\text{г}} d\tau -$$

$$-w_x c^{\text{г}} \rho^{\text{г}} \frac{\partial T^{\text{г}}}{\partial x} dxdydz\left(1-f^{\text{ш}}\right)d\tau + W(x,y,z,\tau)dxdydz(1-\varepsilon)d\tau =$$

$$= c^{\text{ш}} \rho^{\text{ш}} dxdydz(1-\varepsilon)\frac{\partial T^{\text{ш}}}{\partial \tau} d\tau + c^{\text{г}} \rho^{\text{г}} dxdydz\varepsilon \frac{\partial T^{\text{г}}}{\partial \tau} d\tau.$$

Сократив последнее выражение на $dxdydzd\tau$ и, учитывая, что $f^{\text{г}} = \left(1-f^{\text{ш}}\right)$, получим

$$\lambda^{\text{ш}} f^{\text{ш}} \frac{\partial^2 T^{\text{ш}}}{\partial x^2} + \lambda^{\text{г}}\left(1-f^{\text{ш}}\right)\frac{\partial^2 T^{\text{г}}}{\partial x^2} - w_x c^{\text{г}} \rho^{\text{г}} \frac{\partial T^{\text{г}}}{\partial x}\left(1-f^{\text{ш}}\right) + W(x,y,z,\tau)(1-\varepsilon) =$$

$$= c^{\text{ш}} \rho^{\text{ш}} (1-\varepsilon)\frac{\partial T^{\text{ш}}}{\partial \tau} + c^{\text{г}} \rho^{\text{г}} \varepsilon \frac{\partial T^{\text{г}}}{\partial \tau}.$$

Так как частицы шихты и поры, заполненные газом, имеют небольшие размеры, то можно допустить, что передача теплоты от шихты к газу (и обратно) осуществляется практически мгновенно, то есть $T^{\text{г}} \approx T^{\text{ш}} = T$. Кроме того, можно допустить, что $f^{\text{г}} \approx \varepsilon$. С учетом этих допущений получим следующее дифференциальное уравнение теплопереноса

$$\left[\lambda^{\text{ш}}(1-\varepsilon) + \lambda^{\text{г}}\varepsilon\right]\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - c^{\text{г}}\rho^{\text{г}}\varepsilon w_x \frac{\partial T}{\partial x} + W(x,y,z,\tau)(1-\varepsilon) = \left[c^{\text{ш}}\rho^{\text{ш}}(1-\varepsilon) + c^{\text{г}}\rho^{\text{г}}\varepsilon\right]\frac{\partial T}{\partial \tau}.$$

Обозначим: $c_{\text{э}}\rho_{\text{э}} = \left[c^{\text{ш}}\rho^{\text{ш}}(1-\varepsilon) + c^{\text{г}}\rho^{\text{г}}\varepsilon\right]$ – эффективная объемная теплоемкость слоя шихты, поры которого заполнены газом; $\lambda_{\text{э}} = \left[\lambda^{\text{ш}}(1-\varepsilon) + \lambda^{\text{г}}\varepsilon\right]$ – эффективная теплопроводность пористого слоя шихты; $q_V = W(x,y,z,\tau)(1-\varepsilon)$ – объемная мощность внутренних источников тепла, отнесенная к единице объема насыпного слоя шихты.

Так как локальную скорость потока газа w_x в порах шихты на практике измерить невозможно, то введем среднюю скорость $\overline{w}_x$, рассчитанную по известному расходу газа G через цилиндрический патрон и площади сечения $S = \pi R_0^2$ патрона по формуле $\overline{w}_x = G/S$. С учетом известных значений средней скорости $\overline{w}_x$ и порозности ε насыпного слоя шихты значение локальной скорости w_x газа между частицами шихты можно вычислить по формуле $w_x = \overline{w}_x/\varepsilon = G/(\varepsilon S)$.

С учетом введенных обозначений дифференциальное уравнение теплопереноса окончательно можно записать в виде

$$\lambda_э \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - c^г \rho^г \overline{w}_x \frac{\partial T}{\partial x} + q_V(x, y, z, \tau) = c_э \rho_э \frac{\partial T}{\partial \tau}.$$

Если повторить рассмотренный выше вывод для переноса теплоты через другие грани параллелепипеда, расположенные нормально к осям y и z, то получим трехмерное дифференциальное уравнение теплопереноса в декартовой системе координат в виде

$$\lambda_э \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - c^г \rho^г \left(\overline{w}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \overline{w}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \overline{w}_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_V(x, y, z, \tau) = c_э \rho_э \frac{\partial T}{\partial \tau}.$$

По аналогии с изложенным выше, достаточно несложно осуществить вывод приведенного ниже дифференциального уравнения для цилиндрической системы пространственных координат.

Двухмерная математическая модель теплопереноса в регенеративном патроне

Рассмотрим нестационарное температурное поле в регенеративном патроне цилиндрической формы (рис. 2). Начало координат поместим на оси симметрии во входном сечении патрона. Ось z направим в направлении движения потока газа, а ось r – по радиусу патрона.

Для упрощения расчетов по математической модели сформулируем следующие допущения.

1. Перенос теплоты вдоль оси z за счет теплопроводности пренебрежимо мал по сравнению с переносом теплоты за счет конвективного движения газа.
2. Температурное поле симметрично относительно координаты z.
3. Объемная мощность внутренних источников тепла зависит только от продольной координаты z и времени.

Для двумерного нестационарного температурного поля в регенеративном патроне цилиндрической формы с учетом сформулированных допущений дифференциальное уравнение переноса теплоты запишется в виде

$$(c_э \rho_э) \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial \tau} = \lambda_э \left(\frac{\partial^2 T(r, z, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial r} \right) - \overline{w} c^г \rho^г \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial z} + q_V(z, \tau), \quad (1)$$

$$z > 0, \quad 0 < r < R_0, \quad \tau > 0.$$

Дополним дифференциальное уравнение (1) начальным и граничными условиями [3]. Примем, что начальная температура в патроне одинакова в любой его точке, то есть

$$T(r, z, 0) = T_0. \quad (2)$$

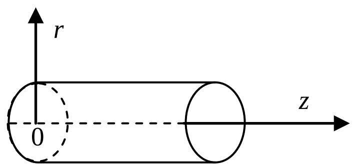


Рис. 2. К постановке краевой задачи теплопереноса в цилиндрическом патроне

На внешней цилиндрической поверхности патрона задан теплообмен с окружающей средой в виде граничных условий третьего рода

$$-\lambda_э \frac{\partial T(R_0, z, \tau)}{\partial r} = \alpha[T(R_0, z, \tau) - T_с], \tag{3}$$

где $T(R_0, z, \tau)$ – функция, определяющая распределение температуры на внешней поверхности патрона.

Во входном сечении патрона при $z = 0$ задано распределение температуры

$$T(r, 0, \tau) = T_{вх}(r, \tau), \tag{4}$$

а при $r = 0$ задано условие симметрии температуры

$$\frac{\partial T(0, z, \tau)}{\partial r} = 0. \tag{5}$$

Одномерная математическая модель теплопереноса в регенеративном патроне

Для получения одномерной математической модели в цилиндрическом патроне умножим обе части уравнения (1) на $\frac{2}{R_0^2} r$ и проинтегрируем по r на отрезке $[0; R_0]$

$$\begin{gathered}(c_э\rho_э)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{2}{R_0^2}\int_0^{R_0} T(r,z,\tau)rdr\right] = \lambda_э \frac{2}{R_0^2}\int_0^{R_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial T(r,z,\tau)}{\partial r}\right]rdr - \\ -\overline{w}c^г\rho^г\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{2}{R_0^2}\int_0^{R_0} T(r,z,\tau)rdr\right] + q_V(z,\tau)\frac{2}{R_0^2}\int_0^{R_0} rdr.\end{gathered} \tag{6}$$

Обозначим

$$\overline{T}(z,\tau) = \frac{\int_0^{R_0} T(r,z,\tau)rdr}{\int_0^{R_0} rdr} = \frac{2}{R_0^2}\int_0^{R_0} T(r,z,\tau)rdr, \tag{7}$$

где $\overline{T}(z,\tau)$ – среднеинтегральная температура в сечении цилиндрического патрона.

С учетом введенного обозначения (7), уравнение (6) примет вид

$$(c_э\rho_э)\frac{\partial\overline{T}(z,\tau)}{\partial\tau} = \lambda_э \frac{2}{R_0^2}\left[r\frac{\partial T(r,z,\tau)}{\partial r}\right]_0^{R_0} - \overline{w}c^г\rho^г\frac{\partial\overline{T}(z,\tau)}{\partial z} + q_V(z,\tau). \tag{8}$$

Первый член в правой части уравнения (8) равен

$$\lambda_э \frac{2}{R_0^2}\left[r\frac{\partial T(r,z,\tau)}{\partial r}\right]_0^{R_0} = \lambda_э \frac{2}{R_0}\frac{\partial T(R_0,z,\tau)}{\partial r}.$$

Примем во внимание, что граничное условие (3) можно представить в виде

$$-\lambda_э \frac{\partial T(R_0, z, \tau)}{\partial r} = \alpha[T(R_0, z, \tau) - T_с] \approx \overline{\alpha}\left[\overline{T}(z, \tau) - T_с\right],$$

где $\overline{\alpha}$ – скорректированное значение коэффициента теплообмена, позволяющее в граничном условии третьего рода (3) использовать введенное формулой (7) среднеинтегральное значение температуры $\overline{T}(z, \tau)$ вместо температуры $T(R_0, z, \tau)$ внешней поверхности регенеративного патрона. Тогда уравнение (8) примет вид

$$(c_э \rho_э) \frac{\partial \overline{T}(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{2\overline{\alpha}}{R_0}\left[\overline{T}(z, \tau) - T_с\right] - \overline{w} c^г \rho^г \frac{\partial \overline{T}(z, \tau)}{\partial z} + q_V(z, \tau). \quad (9)$$

При практическом использовании уравнения (9) его необходимо дополнить начальным условием

$$\overline{T}(z, 0) = \overline{T}_0, \quad (10)$$

а во входном сечении патрона при $z = 0$ необходимо задать функцию

$$\overline{T}(0, \tau) = \overline{T}_{вх}(\tau). \quad (11)$$

Таким образом, нами получена двухмерная математическая модель теплопереноса в регенеративном патроне цилиндрической формы, представленная в виде уравнений (1) – (5), а также одномерная математическая модель, представленная в виде уравнений (9) – (11). В настоящее время разрабатывается комплекс технических средств, предназначенных для экспериментальной проверки адекватности предложенных математических моделей.

Список литературы

1. Журавленко, В.Я. Дифференциальные уравнения процесса охлаждения горного массива при движении жидкости через подземный пористый слой / В.Я. Журавленко, А.В. Шурчков // Аналитические методы решения задач переноса тепла и вещества : респ. межведомств. сб. – Киев, 1967. – С. 63–71.

2. Фатеев, Г.А. Перенос тепла в реагирующем пористом теле при наличии фильтрации газа / Г.А. Фатеев // Тепло- и массообмен при фазовых и химических превращениях / под ред. А.В. Лыкова, Б.М. Смольского. – Минск, 1968. – С. 100–114.

3. Пономарев, С.В. Теоретические и практические аспекты теплофизических измерений. Кн. 1 / С.В. Пономарев, С.В. Мищенко, А.Г. Дивин. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. – 204 с.

Mathematical Modeling of Heat Transfer During Chemosorption

P.V. Balabanov, S.V. Ponomarev, A.V. Trofimov

Department "Automated Systems and Devices", TSTU

Key words and phrases: heat transfer; mathematical model; process of air regeneration.

Abstract: The paper presents the conclusion of the differential equation of heat transfer during the flow of gas mixture containing carbon dioxide and moisture through the cylinder-shaped chuck filled with regenerative product. Two-dimensional and one-dimensional mathematical models of heat transfer in regenerative cylinder-shaped chuck are offered.

Matematische Modellierung der Wärmeübertragung im Laufe der Chemosorption

Zusammenfassung: Es ist die Schlussfolgerung der Differentialangleichung der Wärmeübertragung bei der Bewegung der Gasmischung, die das kohlensauere Gas und die Feuchtigkeit hat, durch die Patrone der zylindrischen Form, die vom regenerativen Produkt angefüllt ist, angeführt. Es sind die eindimensionalen und zweidimensionalen matematischen Modelle der Wärmeübertragung in der regenerativen Patrone der zylindrischen Form angeboten.

Modélation mathématique du transfert de chaleur au processus de la chémosorption

Résumé: Est citée la conclusion de l'équation du transfert de chaleur lors du mouvement du mélange gazeux contenant le gaz carbonique et l'humidité à travers le mandrin de la forme cylindrique rempli d'un produit régénéré. Sont proposés les modèles mathématiques bidimensionnel et unidimensionnel du transfert de chaleur dans le mandrin régénéré de la forme cylindrique.
