УДК 519.8:61

ПРИМЕНЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПИРСОНА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАГРУЖЕННОСТИ КАБИНЕТОВ ЛЕЧЕБНО-ПРОФИЛАКТИЧЕСКИХ УЧРЕЖДЕНИЙ

В.В. Битюкова[1], А.А. Хвостов[2], Д.И. Ребриков[2]

Воронежская государственная медицинская академия (1); кафедра «Информационные и управляющие системы», Воронежская государственная технологическая академия (2)

Представлена членом редколлегии профессором С.И. Дворецким

Ключевые слова и фразы: загруженность диагностического кабинета; задача распределения ресурсов; метод моментов; многомодальные распределения; параметры распределения; распределение Пирсона; семейство универсальных распределений.

Аннотация: Рассматривается проблема планирования работы кабинетов лечебно-профилактических учреждений. Предложены несколько способов решения задачи с анализом их достоинств и недостатков, в результате чего выбран способ идентификации распределения загруженности кабинетов семейством универсальных распределений. На примере показана целесообразность выбранного способа.

Планирование загруженности диагностических кабинетов и персонала в медицинских учреждениях является одной из основных задач организации эффективной работы системы «пациент – учреждение». Главная цель планирования – обеспечение требуемого уровня загруженности диагностических кабинетов и персонала. Решение поставленной задачи усложняется стохастическим характером процесса в системе.

В основу системы планирования могут быть положены статистические методы, оперирующие параметрами функции распределения, которая описывает загруженность диагностических кабинетов во времени.

График загруженности кабинета (рис. 1), ввиду действия различных причин, (сезонность заболеваний, приоритетное обслуживание и т.п.) имеет вид многомодальной функции распределения.

Задача планирования может быть сформулирована как идентификация распределения загруженности кабинетов и определение параметров, которые необходимы для анализа функционирования кабинетов лечебно-профилактических учреждений (**ЛПУ**).

Поставленную задачу можно решить путем аппроксимации графика загруженности кабинета с применением «типовых» распределений, специальных рядов или семейств универсальных распределений Пирсона [3].

Задача аппроксимации на основе типовых распределений решается итерационно и включает выполнение трех основных шагов: предварительного выбора вида закона распределения; определения оценок параметров закона распределения; оценки согласованности закона распределения и экспериментальных данных.

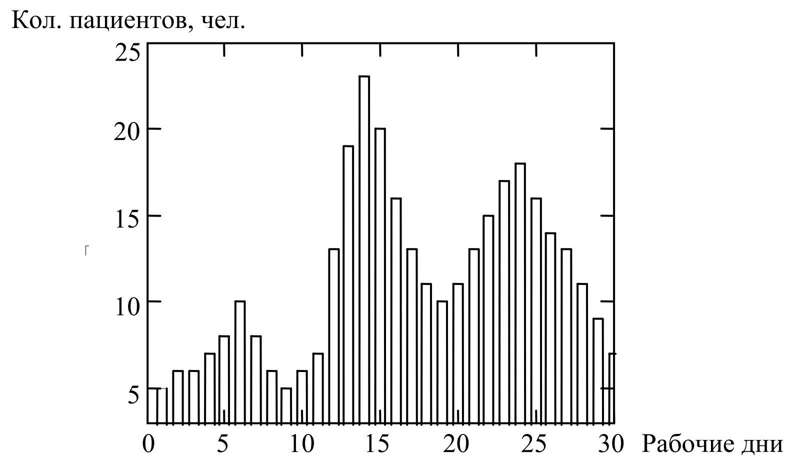

Рис. 1. Пример графика загруженности диагностического кабинета

Преимущество применения типовых законов распределения состоит в их хорошей изученности и возможности получения состоятельных, несмещенных и относительно высокоэффективных оценок параметров. Однако, типовые законы распределения не обладают необходимым разнообразием форм, поэтому их применение не дает необходимой общности представления случайных величин, которые встречаются при исследовании работы кабинетов ЛПУ. Так, например, при ОРВИ с момента начала распространения заболевания, характерно резкое увеличение загруженности кабинетов, функционирование которых связано с данным заболеванием, на графике (рис. 2) этот период соответствует 1–6 рабочему дню, затем в загруженности просматривается плавный спад 7–20 рабочий день. Возможны также другие варианты с ярко выраженной асимметрией и эксцессом.

Для описания различных форм распределения могут быть использованы специальные ряды, например, основанные на полиномах Чебышева–Эрмита [3].

К недостаткам специальных рядов следует отнести отсутствие физического смысла коэффициентов ряда и их достаточно большое количество.

Методы аппроксимации на основе универсальных семейств распределений обеспечивают высокую гибкость решения задачи аппроксимации распределений.

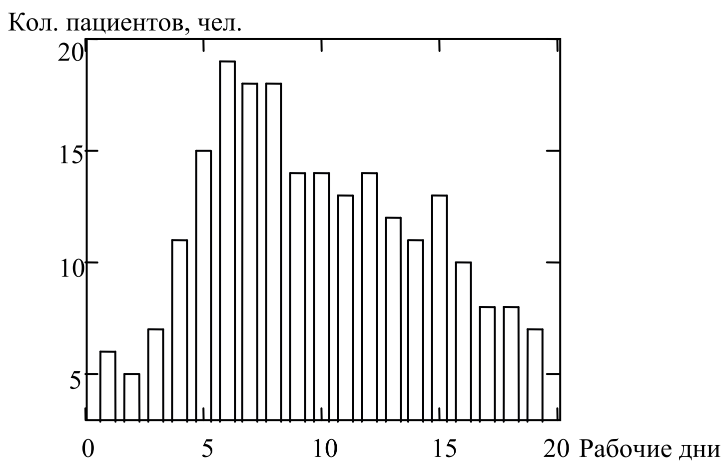

Рис. 2. Пример графика загруженности диагностического кабинета

Наиболее распространенными подходами к построению универсальных семейств распределений являются подходы, основанные на методе моментов, и на замене исходной выборки другой, распределение которой является стандартным. Первый подход реализуется семейством универсальных распределений Пирсона, а второй семейством универсальных распределений Джонсона [1–3].

Наиболее целесообразным является применение данного подхода ввиду того, что аппроксимация с использованием универсальных распределений Пирсона позволяет получить параметры распределения, которые можно будет интерпретировать как характеристики функционирования кабинетов ЛПУ.

Функции плотности вероятности случайной величины для семейства распределений Пирсона является решением дифференциального уравнения вида [3]

$$\frac{df(h)}{dx} = \frac{(x-a)\,f(h)}{\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2\right)}, \tag{1}$$

где величина x соответствует времени (рабочему дню кабинета, часам работы и т.д.).

Данное уравнение отражает изменение величины h (загруженность диагностического кабинета) с течением времени. Уравнение содержит четыре неизвестных параметра. Их вычисление основано на методе моментов – четыре выборочных момента приравниваются к соответствующим моментам теоретического распределения, являющимся функциями от неизвестных параметров. Решая полученную систему уравнений относительно неизвестных параметров, получают искомые оценки параметров в виде функций выборочных моментов [2, 3]:

$$\begin{gathered} a = \mu_3\left(\mu_4 + 3\mu_2^2\right)/A\,; \\ b_0 = -\,\mu_2\left(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2\right)/A; \\ b_1 = -\,\mu_3\left(\mu_4 + 3\mu_2^2\right)/A; \\ b_2 = -\left(2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3\right)/A; \\ A = 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2, \end{gathered} \tag{2}$$

где μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 – моменты распределения величины x, определяемые по формулам (для дискретного распределения):

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} p_i\,; \tag{3}$$

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1)^k\, p_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} p_i\,. \tag{4}$$

Выражения для плотности $f(x)$ выводятся путем интегрирования дифференциального уравнения. Интегрирование позволяет получить 11 типов функций плотности распределения, три из которых являются основными, а остальные – их частными случаями.

Распределение $f(x)$ сосредоточено на конечном интервале, если корни c_1 и c_2 уравнения $B_0 + B_1 t + B_2 t^2 = 0$ представляют собой действительные числа различных знаков, при этом получается первый основной тип распределения Пирсона.

При аппроксимации зависимости загруженности кабинета в виду особенностей задачи чаще используется первый тип семейства распределений Пирсона.

Опуская подробности решения дифференциального уравнения, окончательно плотность распределения получается в виде

$$f_1(y) = \frac{y^{\gamma}(1-y)^{\eta}}{\mathrm{B}(\gamma,\eta)}, \tag{5}$$

где $0 \le y \le 1$, параметры γ и η определяются по формулам:

$$\gamma = \frac{c_1}{B_2(c_1+c_2)}; \qquad \eta = \frac{c_2}{B_2(c_1+c_2)}.$$

Данный вид функции соответствует β-распределнию первого рода (распределению Пирсона первого типа). Переменная y определяется через исходный (не центрированный и несмещенный) аргумент x по формуле

$$y = \frac{x-\theta_1}{\theta_2}, \tag{6}$$

где θ_1 и θ_2 – соответственно параметры центровки $\theta_1 = c_1 - \mu_1 - a$ и масштаба $\theta = c_1 + c_2$ аргумента x определяют соответственно начало и ширину области действия данного пика нагрузки. Соотношение между параметрами γ и η определяет положение максимума на кривой (положение моды) и определяется по формуле

$$M = \frac{\gamma}{\gamma+\eta}\theta_2 + \theta_1. \tag{7}$$

Значение величин γ и η определяют ширину и высоту пика загруженности.

Таким образом загруженность диагностического кабинета в области одного пика может быть описана при помощи функции плотности вероятности из семейства универсальных распределений. Наиболее часто на практике используется β-распределение.

Описание нескольких экстремумов на кривой загруженности можно представить в виде суммы распределений, соответствующих отдельным пикам в виде

$$h(x) = A + \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x). \tag{8}$$

Последовательность описания статистических данных распределениями Пирсона включает следующие этапы.

1. Разбиение графика загруженности на различные области отдельных пиков. Определяется по положению минимумов на кривой загруженности.
2. Вычисление значения оценок первых четырех моментов эмпирического распределения путем обработки экспериментальных данных (**ЭД**).
3. Вычисление параметров B_0, B_1, B_2, a семейства распределений, переход от исходной переменной x к центрированной и смещенной переменной t.
4. Анализ корней квадратного уравнения c_1, c_2, и определение типа распределения.
5. Вычисление параметров выбранного типа распределения.
6. Проверка согласованности полученного распределения и экспериментальных данных с использованием критерия.
7. В случае недопустимого результата аппроксимации полученные параметры распределения необходимо уточнить минимизацией ошибки с использованием метода наименьших квадратов.

Для примера рассмотрим аппроксимацию графика загруженности диагностического кабинета, который приведен на рис. 1.

На рис. 3 представлены результаты аппроксимации загруженности кабинета взвешенной суммой трех распределений из универсального семейства распределений Пирсона. Полученная функция распределения имеет 3 моды, что соот-

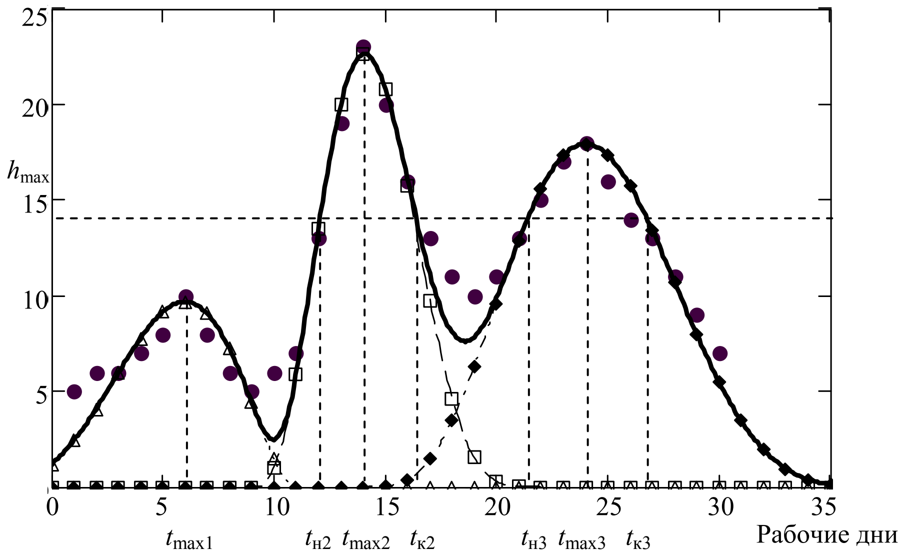

Рис. 3. Вид кривых, полученных при аппроксимации графика загруженности диагностического кабинета:
△-△ ⊟-□ ◆-◆ – кривые загруженности, полученные для *1*, *2*, *3* пика соответственно; ● ● – начальная кривая загруженности; —— результирующая кривая загруженности

Таблица

Значения параметров функции распределения, полученные с использованием метода моментов

Параметр распределения	t_{max1}	t_{max2}	t_{max3}
μ_1	5,06	14,69	24,22
μ_2	5,81	5,74	9,45
μ_3	–1,72	0,56	2,68
μ_4	67,51	74,14	184,36
c_1	–5,12	-5,70	–6,05
c_2	4,39	6,05	6,81
θ_1	–0,063	8,98	18,18
θ_2	9,52	11,74	12,85
γ	0,55	1,43	0,58
η	0,33	1,58	0,78
M	5,89	14,57	23,66

ветствует количеству экстремумов на графике загруженности кабинета. Такие параметры как мода M, параметр центровки θ_1, точки пересечения функций плотности распределения пиков загруженности могут быть интерпретированы как время максимального наплыва пациентов $t_{\max 1}$, $t_{\max 2}$, $t_{\max 3}$, зона действия одного пика и начало наплыва пациентов соответственно (см. табл.). Также с использованием полученной функции распределения можно провести анализ перегрузки кабинета, на графике это выглядит как превышение максимальной пропускной способности кабинета $h_{\max}$, время перегрузки $t_{н2}$, …, $t_{к2}$, $t_{н3}$, …, $t_{к3}$ для 2-го и 3-го пика загруженности кабинета соответственно.

Исходя из полученных результатов можно сделать вывод, что аппроксимация загруженности диагностического кабинета семейством универсальных распределений Пирсона является удобным инструментом моделирования, так как позволяет получить агрегатированные оценки имеющейся случайной величины, что позволяет ЛПР осуществлять планирование работы диагностических кабинетов.

Список литературы

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1999. – 480 с.

2. Крамер, Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М. : Мир, 1975. – 658 с.

3. Кендалл, М. Теория распределений : пер. с англ. / М. Кендалл, А. Стьюарт. – М. : Наука, 1966. – 588 с.

Application of Universal Assemblage of Pirson Distribution Criterion for Modeling the Working Schedule of Medical Centers

V.V. Bityukova[1], A.A. Khvostov[2], D.I. Rebrikov[2]

Voronezh State Medical Academy (1); Department "Information and Control Systems", Voronezh State Technological Academy, (2)

Key words and phrases: assemblage of universal distributions; moment method; multi-modal distributions; parameters of distribution; Pirson distribution; task of distributing resources; working schedule of diagnostics room.

Abstract: The problem of planning the working schedule of medical centers is considered. Several ways of solving the task based on the analysis of their advantages and disadvantages are proposed; as a result, the technique of identification of distribution of working schedule by the family of universal distributions is selected. The expedience of the selected technique is verified by the given example.

Anwendung der universellen Familien der Pirson-Verteilungen für die Modellierung der Auslastung der Kabinette der therapeutisch-prophylaktischen Institutionen

Zusammenfassung: Es wird das Problem des Arbeitsplanes der Kabinette der therapeutisch-prophylaktischen Institutionen betrachtet. Es sind einige Wege der Lösung der Aufgabe mit der Analyse ihrer Vorteile und Nachteile angeboten. Als

Ergebnis wurde die Weise der Identifizierung der Verteilung der Auslastung der Kabinette von der Familie der universellen Verteilungen gewählt. Auf dem Beispiel ist die Zweckmäßigkeit der gewählten Weise aufgezeigt.

Appliction des familles universelles de la répartition Pirson pour le modélage du surchargement des cabinets des établissements de soins médicaux

Résumé: Est examiné le problème de la planification du fonctionnement des cabinets des établissements de soins médicaux. Sont prposés plusieurs variants de la solution du problème avec l’analyse de leurs inconvénients et de leurs avantages, après quoi est choisi un moyen d’identification de la répartition du surchargement des cabinets par des familles universelles de la répartition. A un exemple est montrée la justification du moyen choisi.
