УДК 517.926

О СЛУЧАЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ *n*-ГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.И. Фомин

Кафедра «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ»

Представлена членом редколлегии профессором Г.М. Куликовым

Ключевые слова и фразы: банахово пространство; дифференциальный оператор; общее решение; характеристический операторный многочлен; частное решение.

Аннотация: Методом неопределенных коэффициентов найдено частное решение линейного дифференциального уравнения *n*-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве в случае, когда правая часть уравнения имеет специальный вид.

В комплексном банаховом пространстве E рассматривается уравнение

$$u^{(n)} + A_1 u^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} u' + A_n u = f(t), \ \ 0 \le t < \infty, \tag{1}$$

где $A_i \in L(E)$, $1 \le i \le n$; $L(E)$ – комплексная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в E; $f(t) \in C([0,\infty);E)$, $C([0,\infty);E)$ – множество непрерывных функций, действующих из $[0,\infty)$ в E.

В работе [1] указана формула общего решения уравнения (1): $u = u_{0.0} + u_*$, где $u_{0.0}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения; u_* – частное решение неоднородного уравнения, при этом u_* найдено методом вариации произвольных постоянных. Если правая часть уравнения (1) имеет специальный вид, то, как и в скалярном случае [2, с. 87], можно указать его частное решение, не прибегая к методу Лагранжа.

Пусть

$$f(t) = \mathrm{e}^{\Lambda_0 t} S_m(t), \tag{2}$$

где $\Lambda_0 \in L(E)$, $S_m(t) = \sum_{i=0}^{m} s_i t^{m-i}$ – многочлен действительной переменной t с векторными коэффициентами $s_i \in E$, $0 \le i \le m$, $s_0 \ne 0$.

Теорема 1. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид (2) и выполняются следующие условия:

1.1) $A_k\Lambda_0 = \Lambda_0 A_k$, $1 \le k \le n$;

1.2) оператор Λ_0 не является корнем характеристического операторного многочлена $P(\Lambda) = \sum_{k=0}^{n} A_k \Lambda^{n-k}$, где $A_0 = I$;

1.3) оператор $P(\Lambda_0) = \sum_{k=0}^{n} A_k \Lambda_0^{n-k}$ имеет ограниченный обратный.

Тогда уравнение (1) имеет частное решение вида

$$u_* = \mathrm{e}^{\Lambda_0 t} Q_m(t), \tag{3}$$

где

$$Q_m(t) = \sum_{i=0}^{m} q_i t^{m-i} ;$$

$$q_0 = [P(\Lambda_0)]^{-1} s_0; \tag{4}$$

$$q_i = [P(\Lambda_0)]^{-1} \left[s_i - \sum_{j=1}^{\min\{i,n\}} C_{m-i+j}^{j} P^{(j)}(\Lambda_0) q_{i-j} \right], \ 1 \le i \le m; \tag{5}$$

$$P^{(j)}(\Lambda_0) = j! \sum_{k=0}^{n-j} C_{n-k}^{j} A_k \Lambda_0^{n-j-k}, \ 0 \le j \le n . \tag{6}$$

Доказательство. Используя дифференциальный оператор $L : C^n([0,\infty); E) \to \to C([0,\infty); E)$, $Lv = \sum_{k=0}^{n} A_k v^{(n-k)}$ для любой функции $v \in C^n([0,\infty); E)$ (здесь $A_0 = I$), запишем уравнение (1) в виде $Lu = f$. Заметим, что в силу линейности операторов $A_k, 1 \le k \le n,$ оператор L линеен. Подберем значения векторных коэффициентов $q_i, 0 \le i \le m$, таким образом, чтобы функция вида (3) была решением уравнения (1) с правой частью из условия теоремы:

$$L\left(\mathrm{e}^{\Lambda_0 t} Q_m(t)\right) = \mathrm{e}^{\Lambda_0 t} S_m(t). \tag{7}$$

Заметим, что для любой функции $g(t) \in C^n([0,\infty); E)$ справедлива формула

$$L\left(\mathrm{e}^{\Lambda_0 t} g(t)\right) = \mathrm{e}^{\Lambda_0 t} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\Lambda_0) g^{(j)}(t) , \tag{8}$$

где $P^{(j)}(\Lambda_0)$ имеет вид (6) (доказательство формулы (8) аналогично ее доказательству в скалярном случае [2, с. 83], при этом используется условие 1.1) из формулировки теоремы). В силу (8) соотношение (7) принимает вид

$$\mathrm{e}^{\Lambda_0 t} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\Lambda_0) Q_m^{(j)}(t) = \mathrm{e}^{\Lambda_0 t} S_m(t).$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор $e^{-\Lambda_0 t}$ и используя известные свойства операторной экспоненты $e^{At}e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}$, $-\infty < t, \tau < \infty$; $e^{At}\big|_{t=0} = I$ [3, с. 41], получаем соотношение

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\Lambda_0) Q_m^{(j)}(t) = S_m(t). \qquad (9)$$

Заметим, что

$$Q_m^{(j)}(t) = j! \sum_{i=0}^{m-j} C_{m-i}^{j} q_i t^{m-j-i}, 0 \le j \le m; \qquad (10)$$

$$Q_m^{(j)}(t) = 0, \; j \ge m+1, \qquad (11)$$

в частности, $Q_m^{(0)}(t) = Q_m(t)$.

Пусть $m \le n$, тогда в силу (10), (11) соотношение (9) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{m} \left[P^{(j)}(\Lambda_0) \sum_{i=0}^{m-j} C_{m-i}^{j} q_i t^{m-j-i} \right] = S_m(t),$$

или в силу линейности операторов $P^{(j)}(\Lambda_0), 0 \le j \le n$,

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{m-j} C_{m-i}^{j} t^{m-j-i} P^{(j)}(\Lambda_0) q_i = S_m(t). \qquad (12)$$

Приравняем в формуле (12) коэффициенты при одинаковых степенях t:

$$\begin{aligned}
&[t^m P(\Lambda_0)q_0 + t^{m-1}P(\Lambda_0)q_1 + t^{m-2}P(\Lambda_0)q_2 + \ldots + tP(\Lambda_0)q_{m-1} + P(\Lambda_0)q_m] + \\
&+[C_m^1 t^{m-1}P'(\Lambda_0)q_0 + C_{m-1}^1 t^{m-2}P'(\Lambda_0)q_1 + \ldots + C_2^1 tP'(\Lambda_0)q_{m-2} + P'(\Lambda_0)q_{m-1}] + \\
&+[\qquad C_m^2 t^{m-2}P''(\Lambda_0)q_0 + \ldots + C_3^2 tP''(\Lambda_0)q_{m-3} + P''(\Lambda_0)q_{m-2}] + \\
&+\ldots+ \\
&+[\qquad C_{m-1}^{m-2} tP^{(m-2)}(\Lambda_0)q_1 + P^{(m-2)}(\Lambda_0)q_2] + \\
&+[\qquad C_m^{m-1} tP^{(m-1)}(\Lambda_0)q_0 + P^{(m-1)}(\Lambda_0)q_1] + \\
&+[\qquad P^m(\Lambda_0)q_0] = \\
&= s_0 t^m + s_1 t^{m-1} + s_2 t^{m-2} + \ldots + s_{m-1}t + s_m;
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
P(\Lambda_0)q_0 = s_0; \\
P(\Lambda_0)q_1 + C_m^1 P'(\Lambda_0)q_0 = s_1; \\
P(\Lambda_0)q_2 + C_{m-1}^1 P'(\Lambda_0)q_1 + C_m^2 P''(\Lambda_0)q_0 = s_2; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P(\Lambda_0)q_{m-1} + C_2^1 P'(\Lambda_0)q_{m-2} + \ldots + C_{m-1}^{m-2} P^{(m-2)}(\Lambda_0)q_1 + C_m^{m-1} P^{(m-1)}(\Lambda_0)q_0 = s_{m-1}; \\
P(\Lambda_0)q_m + P'(\Lambda_0)q_{m-1} + \ldots + P^{(m-2)}(\Lambda_0)q_2 + P^{(m-1)}(\Lambda_0)q_1 + P^{(m)}(\Lambda_0)q_0 = s_m.
\end{cases}$$

Полученная система уравнений имеет решение вида (4), (5) (если $m \le n$, то $\min\{i,n\} = i$ для любого $1 \le i \le m$).

Пусть $m > n$. Тогда вместо (12) получаем соотношение вида

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m-j} C_{m-i}^{j} t^{m-j-i} P^{(j)}(\Lambda_0) q_i = S_m(t) . \tag{13}$$

Приравнивая в формуле (13) коэффициенты при одинаковых степенях t, приходим к системе уравнений вида

$$\begin{cases} P(\Lambda_0) q_0 = s_0; \\ P(\Lambda_0) q_i + \sum_{j=1}^{i} C_{m-i+j}^{j} P^{(j)}(\Lambda_0) q_{i-j} = s_i, 1 \le i \le n; \\ P(\Lambda_0) q_i + \sum_{j=1}^{n} C_{m-i+j}^{j} P^{(j)}(\Lambda_0) q_{i-j} = s_i, n+1 \le i \le m, \end{cases}$$

из которой следуют формулы (4), (5) (если $m > n$, то $\min\{i,n\} = i$ в случае $1 \le i \le n$ и $\min\{i,n\} = n$ в случае $n+1 \le i \le m$). Теорема доказана.

Замечание 1. В теореме 1 условие 1.2) можно опустить, ибо оно следует из условия 1.3).

Замечание 2. В теореме 1 условие 1.3) можно заменить менее жестким условием

1.3′) область значений оператора $P(\Lambda_0)$ совпадает с E.

В этом случае в качестве q_0 достаточно взять любой элемент из полного прообраза элемента s_0, в качестве q_1 – любой элемент из полного прообраза элемента $s_1 - C_m^1 P'(\Lambda_0) q_0$, и т.д., поэтому уравнение (1) может иметь более одного частного решения вида (3).

Теорема 2. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид (2), выполняется условие 1.1) теоремы 1 и, кроме того,

2.1) оператор Λ_0 является корнем кратности r характеристического операторного многочлена $P(\Lambda)$, то есть

$$P^{(j)}(\Lambda_0) = 0, \quad 0 \le j \le r-1; \quad P^{(r)}(\Lambda_0) \ne 0; \tag{14}$$

2.2) оператор $P^{(r)}(\Lambda_0)$ имеет ограниченный обратный.

Тогда уравнение (1) имеет частное решение вида

$$u_* = t^r \mathrm{e}^{\Lambda_0 t} Q_m(t), \tag{15}$$

где

$$Q_m(t) = \sum_{i=0}^{m} q_i t^{m-i},$$

$$q_0 = \left(C_{m+r}^{r}\right)^{-1} \left[P^{(r)}(\Lambda_0)\right]^{-1} s_0; \tag{16}$$

$$q_i = \left(C_{m+r-i}^{r}\right)^{-1} \left[P^{(r)}(\Lambda_0)\right]^{-1} \left[s_i - \sum_{j=1}^{\min\{i,n-r\}} C_{m+r-i+j}^{r+j} P^{(r+j)}(\Lambda_0) q_{i-j} \right], 1 \le i \le m. \tag{17}$$

Доказательство. Запишем формулу (15) в виде $u_* = \mathrm{e}^{\Lambda_0 t} W_{m+r}(t)$, где $W_{m+r}(t) = t^r Q_m(t)$. Тогда вместо (7) получаем

$$L\left(\mathrm{e}^{\Lambda_0 t} W_{m+r}(t)\right) = \mathrm{e}^{\Lambda_0 t} S_m(t). \tag{18}$$

В силу (8) соотношение (18) принимает вид

$$\mathrm{e}^{\Lambda_0 t} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\Lambda_0)\, W_{m+r}^{(j)}(t) = \mathrm{e}^{\Lambda_0 t} S_m(t).$$

Применяя оператор $\mathrm{e}^{-\Lambda_0 t}$ и учитывая условие (14), получаем равенство

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\Lambda_0)\, W_{m+r}^{(j)}(t) = S_m(t). \tag{19}$$

Заметим, что

$$W_{m+r}^{(j)}(t) = j! \sum_{i=0}^{m+r-j} C_{m+r-i}^{j}\, q_i t^{m+r-j-i}, \quad r \le j \le m+r; \tag{20}$$

$$W_{m+r}^{(j)}(t) = 0, \quad j \ge m+r+1. \tag{21}$$

Пусть $m + r \le n$. Тогда в силу (20), (21) соотношение (19) принимает вид

$$\sum_{j=r}^{m+r} P^{(j)}(\Lambda_0) \sum_{i=0}^{m+r-j} C_{m+r-i}^{j}\, q_i t^{m+r-j-i} = S_m(t),$$

или в силу линейности операторов $P^{(j)}(\Lambda_0)$, $0 \le j \le n$,

$$\sum_{j=r}^{m+r} \sum_{i=0}^{m+r-j} C_{m+r-i}^{j}\, t^{m+r-j-i} P^{(j)}(\Lambda_0)\, q_i = S_m(t). \tag{22}$$

Пусть $k = j - r$. Тогда соотношение (22) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{m-k} C_{m+r-i}^{r+k}\, t^{m-k-i} P^{(r+k)}(\Lambda_0)\, q_i = S_m(t). \tag{23}$$

Приравнивая в формуле (23) коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем

$$C_{m+r}^{r} P^{(r)}(\Lambda_0) q_0 = s_0,$$

$$C_{m+r-i}^{r} P^{(r)}(\Lambda_0) q_i + \sum_{j=1}^{i} C_{m+r-i+j}^{r+j}\, P^{(r+j)}(\Lambda_0) q_{i-j} = s_i, \quad 1 \le i \le m,$$

откуда следуют в силу условия 2.2) формулы (16), (17) (если $m + r \le n$, т.е. $m \le n - r$, то $\min\{i, n-r\} = i$ для любого $1 \le i \le m$).

Пусть $m + r \ge n + 1$. Тогда вместо (22) получаем соотношение вида

$$\sum_{j=r}^{n} \sum_{i=0}^{m+r-j} C_{m+r-i}^{j}\, t^{m+r-j-i} P^{(j)}(\Lambda_0)\, q_i = S_m(t),$$

или, полагая $k = j - r$,

$$\sum_{k=0}^{n-r} \sum_{i=0}^{m-k} C_{m+r-i}^{r+k} \, t^{m-k-i} P^{(r+k)}(\Lambda_0) \, q_i = S_m(t) . \qquad (24)$$

Приравнивая в формуле (24) коэффициенты при одинаковых степенях *t*, получаем

$$C_{m+r}^{r} P^{(r)}(\Lambda_0) q_0 = s_0;$$

$$C_{m+r-i}^{r} P^{(r)}(\Lambda_0) q_i + \sum_{j=1}^{i} C_{m+r-i+j}^{r+j} \, P^{(r+j)}(\Lambda_0) q_{i-j} = s_i \,, \;\; 1 \le i \le n-r;$$

$$C_{m+r-i}^{r} P^{(r)}(\Lambda_0) q_i + \sum_{j=1}^{n-r} C_{m+r-i+j}^{r+j} \, P^{(r+j)}(\Lambda_0) q_{i-j} = s_i \,, \;\; n-r+1 \le i \le m \,,$$

откуда следуют формулы (16), (17) (если $m + r \ge n+1$, т.е. $m \ge n - r + 1$, то $\min\{i, n-r\} = i$ в случае $1 \le i \le n-r$ и $\min\{i, n-r\} = n-r$ в случае $n - r + 1 \le i \le m$). Теорема доказана.

Замечание 3. В теореме 2 условие 2.2) можно заменить менее ограничительным условием: область значений оператора $P^{(r)}(\Lambda_0)$ совпадает с *E* (см. замечание 2).

Пусть

$$f(t) = \mathrm{e}^{At} \left[(\cos Bt) S_m(t) + (\sin Bt) W_l(t) \right], \qquad (25)$$

где $A, B \in L(E)$; $S_m(t) = \sum_{i=0}^{m} s_i t^{m-i}$, $s_i \in E,\ 0 \le i \le m,\ s_0 \ne 0$; $W_l(t) = \sum_{i=0}^{l} w_i t^{l-i}$, $w_i \in E,\ 0 \le i \le l,\ w_0 \ne 0$; $\cos Bt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(Bt)^{2k}}{(2k)!}$, $\sin Bt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(Bt)^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Перед тем, как указать структуру частного решения уравнения (1) с правой частью вида (25), приведем некоторые сведения, которые понадобятся в дальнейшем.

Исходя из определения операторных функций e^F, $\cos F$, $\sin F$ операторного аргумента $F \in L(E)$:

$$\mathrm{e}^F = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k}{k!}, \;\; \cos F = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{F^{2k}}{(2k)!}, \;\; \sin F = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{F^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

получаем для любого $Q \in L(E)$

$$\mathrm{e}^{iQ} = \cos Q + i \sin Q, \qquad (26)$$

$$\mathrm{e}^{-iQ} = \cos Q - i \sin Q, \qquad (27)$$

откуда следуют формулы

$$\cos Q = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{iQ} + \mathrm{e}^{-iQ}\right), \qquad (28)$$

$$\sin Q = -\frac{i}{2}\left(\mathrm{e}^{iQ} - \mathrm{e}^{-iQ}\right), \qquad (29)$$

здесь *i* – мнимая единица.

Известно [3, с. 41], что

$$\mathrm{e}^{Q_1}\mathrm{e}^{Q_2} = \mathrm{e}^{Q_1+Q_2}, \ \forall\, Q_1, Q_2 \in L(E) \,|\, Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1 . \tag{30}$$

Пусть $x, y \in E$; $F, T \in L(E)$. Рассмотрим элементы $z = x + iy \in E$, $Z = F + iT \in L(E)$. Положим, по определению, $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$, $\bar{Z} = \overline{F + iT} = F - iT$.

Заметим, что

$$(F + iT)(x + iy) = (Fx - Ty) + i(Fy + Tx). \tag{31}$$

Действительно, в силу определения суммы операторов, произведения оператора на число и линейности операторов F и T получаем

$$(F + iT)(x + iy) = F(x + iy) + (iT)(x + iy) = Fx + iFy + iTx + i^2 Ty = (Fx - Ty) + i(Fy + Tx).$$

Далее,

$$\overline{(F + iT)(x + iy)} = \left(\overline{F + iT}\right)\left(\overline{x + iy}\right). \tag{32}$$

Действительно, в силу (31)

$$\overline{(F + iT)(x + iy)} = (Fx - Ty) - i(Fy + Tx).$$

С другой стороны, используя (31), получаем

$$\left(\overline{F + iT}\right)\left(\overline{x + iy}\right) = (F - iT)(x - iy) = (Fx - Ty) - i(Fy + Tx).$$

Из этих двух соотношений следует (32).

Если $FT = TF$, то

$$\overline{\mathrm{e}^{F+iT}} = \mathrm{e}^{\overline{F+iT}}. \tag{33}$$

Действительно, используя (26), (27), (30), получаем

$$\mathrm{e}^{F+iT} = \mathrm{e}^{F}\mathrm{e}^{iT} = \mathrm{e}^{F}(\cos T + i\sin T);$$

$$\overline{\mathrm{e}^{F+iT}} = \mathrm{e}^{F}(\cos T - i\sin T) = \mathrm{e}^{F}\mathrm{e}^{-iT} = \mathrm{e}^{F-iT} = \mathrm{e}^{\overline{F+iT}}.$$

Замечание 4. Если функция $u = p(t) + iq(t)$ является решением уравнения $Lu = a(t) + ib(t)$, то функция $\bar{u} = p(t) - iq(t)$ является решением уравнения $Lu = a(t) - ib(t)$.

Действительно, по условию

$$L\big(p(t) + iq(t)\big) = a(t) + ib(t).$$

С другой стороны, в силу линейности оператора L

$$L\big(p(t) + iq(t)\big) = Lp(t) + iLq(t).$$

Следовательно,

$$Lp(t) + iLq(t) = a(t) + ib(t).$$

Тогда

$$\overline{Lp(t) + iLq(t)} = \overline{a(t) + ib(t)},$$

т.е.

$$Lp(t) - iLq(t) = a(t) - ib(t).$$

В силу линейности оператора L

$$Lp(t) - iLq(t) = L\big(p(t) - iq(t)\big).$$

Из последних двух равенств получаем

$$L\big(p(t) - iq(t)\big) = a(t) - ib(t),$$

что и требовалось показать.

Теорема 3. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид (25) и выполнены следующие условия:

3.1) $AB = BA$;

3.2) $A_k A = AA_k$, $A_k B = BA_k$, $1 \le k \le n$;

3.3) оператор $Z = A + iB$ не является корнем характеристического операторного многочлена $P(\Lambda)$;

3.4) область значений оператора $P(Z) = \sum_{k=0}^{n} A_k Z^{n-k}$ совпадает с E.

Тогда уравнение (1) имеет частное решение вида

$$u_* = \mathrm{e}^{At}\left[(\cos Bt) U_N(t) + (\sin Bt) V_N(t)\right], \tag{34}$$

где $N = \max\{m, l\}$; $U_N(t)$, $V_N(t)$ – многочлены степени N действительной переменной t с векторными коэффициентами из E.

Доказательство. В силу (28), (29) при каждом $t \in [0, \infty)$

$$\cos Bt = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{iBt} + \mathrm{e}^{-iBt}\right);$$

$$\sin Bt = -\frac{i}{2}\left(\mathrm{e}^{iBt} - \mathrm{e}^{-iBt}\right).$$

Следовательно, правую часть (25) можно записать в виде

$$f(t) = \mathrm{e}^{At}\left[\mathrm{e}^{iBt}\left(\frac{1}{2} S_m(t) - \frac{i}{2} W_l(t)\right) + \mathrm{e}^{-iBt}\left(\frac{1}{2} S_m(t) + \frac{i}{2} W_l(t)\right)\right]. \tag{35}$$

В силу условия 3.1) и формулы (30)

$$\mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{iBt} = \mathrm{e}^{(A+iB)t}, \quad \mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{-iBt} = \mathrm{e}^{(A-iB)t}. \tag{36}$$

Пусть $R_N(t) = \frac{1}{2} S_m(t) - \frac{i}{2} W_l(t)$. Тогда соотношение (35) с учетом формул (36) принимает вид

$$f(t) = \mathrm{e}^{Zt} R_N(t) + \mathrm{e}^{\overline{Z}t}\,\overline{R_N(t)}$$

или в силу (32), (33)

$$f(t) = \mathrm{e}^{Zt} R_N(t) + \overline{\mathrm{e}^{Zt} R_N(t)}.$$

В силу принципа суперпозиции решений частное решение уравнения $Lu = f$ можно записать в виде

$$u_* = u_*^{(1)} + u_*^{(2)}, \tag{37}$$

где $u_*^{(1)}, u_*^{(2)}$ – соответственно частные решения уравнений

$$Lu = e^{Zt} R_N(t); \tag{38}$$

$$Lu = \overline{e^{Zt} R_N(t)}\,. \tag{39}$$

Правая часть уравнения (38) имеет специальный вид (2) с $\Lambda_0 = Z = A + iB$ (в качестве $Q_m(t)$ выступает многочлен $R_N(t)$). В силу условий 3.2), 3.3) оператор Λ_0 удовлетворяет условиям 1.1), 1.2) теоремы 1. Учитывая условие 3.4), теорему 1 и замечание 2, приходим к следующему выводу: уравнение (38) имеет частное решение вида

$$u_*^{(1)} = e^{Zt} K_N(t)\,, \tag{40}$$

где $K_N(t)$ – многочлен степени N действительной переменной t с векторными коэффициентами из E. Тогда в силу замечания 4 уравнение (39) имеет частное решение вида

$$u_*^{(2)} = \overline{e^{Zt} K_N(t)}$$

или в силу (32), (33)

$$u_*^{(2)} = e^{\bar{Z}t}\, \overline{K_N(t)}\,. \tag{41}$$

В силу (37), (40), (41) уравнение (1) имеет частное решение вида

$$u_* = e^{(A+iB)t} K_N(t) + e^{(A-iB)t}\, \overline{K_N(t)}\,,$$

или в силу (36)

$$u_* = e^{At} e^{iBt} K_N(t) + e^{At} e^{-iBt}\, \overline{K_N(t)}\,.$$

В силу (26), (27) при каждом $t \in [0,\infty)$

$$e^{iBt} = \cos Bt + i \sin Bt\,;$$

$$e^{-iBt} = \cos Bt - i \sin Bt\,.$$

Тогда

$$u_* = e^{At}\left[(\cos Bt) U_N(t) + (\sin Bt) V_N(t)\right],$$

где $U_N(t) = K_N(t) + \overline{K_N(t)}$, $V_N(t) = i\left(K_N(t) - \overline{K_N(t)}\right)$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается с учетом теоремы 2 и замечания 3 следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид (25), выполняются условия 3.1), 3.2) теоремы 3 и, кроме того,

4.1) оператор $Z = A + iB$ является корнем кратности r характеристического операторного многочлена $P(\Lambda)$, т.е. $P^{(j)}(Z) = 0$, $0 \le j \le r-1$; $P^{(r)}(Z) \ne 0$;

4.2) область значений оператора $P^{(r)}(Z)$ совпадает с E.

Тогда уравнение (1) имеет частное решение вида

$$u_* = t^r e^{At}\left[(\cos Bt) U_N(t) + (\sin Bt) V_N(t)\right],$$

где $N = \max\{m, l\}$; $U_N(t)$, $V_N(t)$ – многочлены степени N действительной переменной t с векторными коэффициентами из E.

Результаты настоящей работы анонсированы в [4, 5].

Список литературы

1. Фомин, В.И. Об общем решении линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 5. – С. 656–660.

2. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – М. : Наука, 1985. – 232 с.

3. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 536 с.

4. Фомин, В.И. О случае специальной правой части линейного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. шк. «Понтрягинские чтения – XVIII» / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 2006. – С. 213–214.

5. Фомин, В.И. О втором случае специальной правой части линейного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. шк. «Понтрягинские чтения – XVIII» / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 2007. – С. 168–169.

About Case of Special Right Part of Linear Differential Equation by *n*-Multiplicity in Banach Space

V.I. Fomin

Department of Applied Mathematics and Mechanics, TSTU

Key words and phrases: Banach space; characteristic operator polynomial; complex operator; differential operator; general solution; operator exponential particular solution.

Abstract: By the method of indeterminate coefficients particular solution of linear differential equation by n-multiplicity with constant limited operational coefficients in the Banach space was founded, in case when the right part of equation has a special look.

Über den Fall des speziellen rechten Teiles der linearen Differentialgleichung der *n*-Ordnung im Banachischen Raum

Zusammenfassung: Von der Methode der unbestimmten Koeffizienten ist die einzelne Lösung der linearen Differentialgleichung der n-Ordnung mit den ständigen beschränkten Operatorkoeffizienten im Banachischen Raum im Falle gefunden, wenn der rechte Teil der Gleichung die spezielle Gestalt hat.

Sur le cas de la partie droite spéciale de l'équation différentielle de l'ordre-*n* dans l'espace de Banach

Résumé: Par la méthode des coefficients indéterminés est trouvée la solution particilière de l'équation différentielle de l'ordre-n avec les coefficients opérateurs constants limités dans l'espace de Banach dans le cas lorsque la partie droite a une vue spéciale.