УДК 517.911

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ВОЗМУЩЕННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЯМ. ЧАСТЬ 2

А.И. Булгаков [2], Н.П. Пучков [1], В.В. Скоморохов [1], А.А. Григоренко [2], О.П. Беляева [2]

Кафедры: «Высшая математика», ТГТУ (1); «Алгебра и геометрия», ТГУ им. Г.Р. Державина (2)

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: аппроксимация дифференциальных включений; возмущенные включения; дифференциальные включения; краевая задача функционально-дифференциальных включений; многозначные отображения; функциональные включения.

Аннотация: Изучается включение, правая часть которого состоит из алгебраической суммы значений «хорошего» (имеющего замкнутые образы) и «плохого» (не обладающего свойством замкнутости и выпуклости значений) многозначных отображений. Такие включения называются возмущенными. В первой части статьи сформулированы основы теории таких включений, причем здесь доказано, что множество решений таких включений может терять свойство устойчивости («небольшие» изменения правой части могут привести к существенному изменению множества решений). Сформулировано необходимое и достаточное условие когда выполняется свойство устойчивости множества решений. Затем полученные результаты в первой части работы, применяются для исследования краевых задач функционально-дифференциальных включений, аппроксимации дифференциальных включений.

---

3 Краевые задачи функционально-дифференциальных включений

3.1 Возмущение линейной краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений

Здесь для общего вида линейной краевой задачи функционально-дифференциальной системы уравнений определяется общая возмущенная краевая задача, которая состоит из функционально-дифференциального включения, определяемого возмущениями линейной функционально-дифференциальной системы уравнений, и из включения для краевых условий, связанных возмущениями линейного вектор-функционала.

Рассмотрим линейный непрерывный оператор $\mathcal{L}\colon D^n[a,b] \to L^n[a,b]$. Запишем отображение $\mathcal{L}$ в виде

$$\mathcal{L}x = Q\dot{x} + A(\cdot)x(a), \tag{40}$$

где оператор $Q : L^n[a,b] \to L^n[a,b]$ (главная часть оператора $\mathcal{L}$ в представлении (40) (см. [28])) определяется равенством $Q = \mathcal{L}\Lambda$, где оператор $\Lambda\colon L^n[a,b] \to \to D^n[a,b]$ – оператор интегрирования, каждый столбец $n \times n$ матрицы $A(t)$ представляет собой результат применения оператора $\mathcal{L}$ к соответствующему столбцу единичной матрицы: $A(t) = (\mathcal{L}E)(t)$. Будем предполагать, что оператор Q имеет обратный и обратный оператор $Q^{-1}\colon L^n[a,b] \to L^n[a,b]$ непрерывен.

Отметим, что этот класс линейных отображений содержит линейные дифференциальные операторы вида

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) + \mathcal{P}(t)x(t),$$

где отображение $\mathcal{P}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ имеет суммируемые на $[a,b]$ элементы, дифференциальные отображения с операторами внутренней суперпозиции, интегро-дифференциальные операторы и др.

Рассмотрим линейную краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}x = 0, \quad lx = 0, \tag{41}$$

где $l : D^n[a,b] \to \mathbb{R}^n$ – линейный непрерывный вектор-функционал.

Будем предполагать, что краевая задача (41) имеет только нулевое решение. В этом случае согласно [28] существует непрерывный оператор Грина $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$, определенный равенством

$$(Gz)(t) = \int_a^b G(t,s)z(s)\,ds, \quad t \in [a,b], \tag{42}$$

который для произвольного $z \in L^n[a,b]$ решение $x \in D^n[a,b]$ краевой задачи

$$\mathcal{L}x = z, \quad lx = 0 \tag{43}$$

представляет в виде $x = Gz$ и, наоборот, каждое значение Gz – решение задачи (43).

Пусть $X : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ – фундаментальная матрица решений первого уравнения (41), удовлетворяющая условию

$$l(X) = E \tag{44}$$

(E – единичная матрица, матрица $l(X)$ представляет собой результат применения вектор-функционала l к соответствующему столбцу матрицы X). В этом случае краевую задачу

$$\mathcal{L}x = z, \quad lx = c, \tag{45}$$

где $z \in L^n[a,b], c \in \mathbb{R}^n$, можно представить в виде

$$x = Xc + Gz. \tag{46}$$

Отметим, что равенства (45) в реальных математических моделях выполняются с какой-то степенью точности. Кроме того, сами линейные операторы $\mathcal{L}\colon D^n[a,b] \to \to L^n[a,b]$, $l : D^n[a,b] \to \mathbb{R}^n$ определяются для различных процессов с теми или иными допущениями и предположениями, которые определяются либо неполнотой информации об реальном исследуемом процессе, либо «простотой» описания самой математической модели этого процесса. В связи с этими обстоятельствами целесообразно рассмотреть включения

$$\mathcal{L}x \in \Phi(x), \quad lx \in \varphi(x), \tag{47}$$

в которых многозначные отображения $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, $\varphi\colon C^n[a,b] \to \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ могут описать неточность информации об процессе, различного рода предположения и допущения, а также степень аппроксимации математической модели этого процесса.

Будем говорить, что функция $x \in D^n[a,b]$ – решение задачи (47), если x удовлетворяет и первому и второму включениям в (47).

Краевую задачу (47) будем называть *возмущенной линейной краевой задачей* или просто возмущенной краевой задачей.

Рассмотрим интегральное включение

$$x \in X\varphi(x) + G\Phi(x), \tag{48}$$

где X – фундаментальная матрица решений первого уравнения (41), удовлетворяющая равенству (44), отображение $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ – оператор Грина, определенный соотношением (42).

Теорема 9. *Возмущенная краевая задача* (47) *эквивалентна интегральному включению* (48). *Любое решение x включения* (48) *однозначно представимо в виде* (46), *где $c \in \varphi(x)$, $z \in \Phi(x)$.*

Теорема 10. *Оператор Грина $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$, определенный равенством* (42), *переводит каждое слабо предкомпактное множество пространства $L^n[a,b]$ в предкомпактное множество пространства $C^n[a,b]$.*

3.2 Функционально-дифференциальные включения

Здесь на основе результатов пп. 1, 2 (см. [1]) изучается краевая задача (47).

Пусть $q_0 \in C^n[a,b]$, $r \in \varphi(q_0)$ и $w_0 \in L^n[a,b]$. Представим функцию равенством

$$q_0 = Xr + Gw_0 + e, \tag{49}$$

где $e = q_0 - Xr - Gw_0$. Предположим, что функция $k \in L^1[a,b]$ для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству (4), а непрерывная функция $\nu\colon [a,b] \to [0,\infty)$ определена соотношением

$$\nu(t) = \int_a^b |G(t,s)| k(s)\, ds + |e(t)|, \tag{50}$$

где $|G(t,s)|$ – согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $n \times n$ матрицы $G(t,s)$ в представлении (42), $e \in C^n[a,b]$ – функция в правой части равенства (48).

Будем говорить, что оператор Грина $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ и многозначные отображения $\varphi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* $\widetilde{A}$, если найдутся непрерывные изотонные операторы $\Gamma\colon C^1_+[a,b] \to \to L^1_+[a,b]$ и $P : C^1_+[a,b] \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие условиям: для любых $x, y \in \in C^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство (6) и соотношение

$$h[\varphi(x); \varphi(y)] \leqslant P(Z(x-y)); \tag{51}$$

для функции $\nu \in C^1_+[a,b]$, определенной соотношением (50), сходится в пространстве $C^1[a,b]$ ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \nu,\ \mathcal{A}^0\nu = \nu,\ \mathcal{A}^i\nu = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{i-1}\nu),\ i = 1, 2, \ldots, \tag{52}$$

где непрерывный оператор $\mathcal{A}\colon C_+^1[a,b] \to C_+^1[a,b]$ определен равенством

$$(\mathcal{A}z)(t) = \int_a^b |G(t,s)|(\Gamma z)(s)\, ds + \lambda P(z),$$

где
$$\lambda = \max\{|X(t)| : t \in [a,b]\}. \tag{53}$$

Пусть $\xi(\nu)$ – сумма ряда (52), то есть

$$\xi(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \nu. \tag{54}$$

Будем говорить, что оператор Грина $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ и многозначные отображения $\varphi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* $\widetilde{A}^*$, если найдутся непрерывные изотонные операторы $\Gamma\colon C_+^1[a,b] \to$ $\to L_+^1[a,b]$ и $P : C_+^1[a,b] \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие неравенствам (6), (51), а также соотношениям $\Gamma(0) = 0$, $P(0) = 0$ и, кроме того, для любой функции $\widetilde{\nu} \in C_+^1[a,b]$ из некоторой окрестности 0 ряд (52) сходится в пространстве $C^1[a,b]$ и сумма этого ряда непрерывна в 0.

Теорема 11. *Пусть* $q_0 \in C^n[a,b]$, $r \in \varphi(q_0)$ *и* $w_0 \in L^n[a,b]$ *и пусть функция* q_0 *представима равенством* (48)*. Далее, пусть оператор Грина* $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ *и многозначные отображения* $\varphi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* $\widetilde{A}$*. Тогда найдется такое решение* x *задачи* (47)*, для которого выполняются следующие оценки: при любом* $t \in [a,b]$

$$|x(t) - q_0(t)| \leqslant \xi(\nu)(t);$$
$$\|X(r - lx)\|_{C^n[a,b]} \leqslant \lambda P(\xi(\nu));$$

при почти всех $t \in [a,b]$

$$|(\mathcal{L}x)(t) - w(t)| \leqslant k(t) + \Gamma(\xi(\nu))(t),$$

где функции ν, $\xi(\nu)$, *число* λ *определены соотношениями* (50), (54)*,* (53)*, функция* k *удовлетворяют неравенству* (4)*, отображения* Γ *и* P *удовлетворяют оценкам* (6)*,* (51).

Будем говорить, что оператор Грина $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ и многозначные отображения $\varphi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* $\widetilde{B}$, если выполняются следующие условия: найдется неотрицательная функция $\beta \in L^1[a,b]$, что для любых $x, y \in C^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x);\Phi(y)] \leqslant \int_{\mathcal{U}} \beta(s)\, ds\, \|x - y\|_{C^n[a,b]}; \tag{55}$$

найдется число $\alpha \geqslant 0$, что для любых $x, y \in C^n[a,b]$ функционал φ удовлетворяет неравенству
$$h[\varphi(x);\varphi(y)] \leqslant \alpha\|x - y\|_{C^n[a,b]} \tag{56}$$
для функции $\beta \in L^1[a,b]$ и числа $\alpha \geqslant 0$ справедливо соотношение

$$\max_{t\in[a,b]} \int_a^b |G(t,s)|\beta(s)\, ds + \alpha\lambda < 1,$$

где число λ определено равенством (53).

Далее, непрерывный оператор $\widetilde{\mathcal{A}}\colon C^1_+[a,b] \to C^1_+[a,b]$ определен равенством

$$(\widetilde{\mathcal{A}}z)(t) = \left(\int_a^b |G(t,s)|\beta(s)\,ds + \alpha\lambda\right)\|z\|_{C^1[a,b]}.$$

Пусть непрерывная функция $\nu\colon [a,b] \to [0,\infty)$ определена соотношением (50). Обозначим

$$\widetilde{\xi}(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}^i \nu \quad (\widetilde{\mathcal{A}}^0\nu = \nu,\ \widetilde{\mathcal{A}}^i\nu = \widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\mathcal{A}}^{i-1}\nu)) \tag{57}$$

Из теоремы 10 вытекает

Следствие 6. *Пусть* $q_0 \in C^n[a,b]$, $r \in \varphi(q_0)$ *и* $w_0 \in L^n[a,b]$ *и пусть функция* q_0 *представима равенством* (48)*. Далее, пусть оператор Грина* $G: L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ *и многозначные отображения* $\varphi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* $\widetilde{B}$*. Тогда найдется такое решение* x *задачи* (47)*, для которого выполняются следующие оценки: при любом* $t \in [a,b]$

$$|x(t) - q_0(t)| \leqslant \widetilde{\xi}(\nu)(t);$$
$$\|X(r - lx)\|_{C^n[a,b]} \leqslant \lambda\alpha\|\widetilde{\xi}(\nu)\|_{C^1[a,b]};$$

при почти всех $t \in [a,b]$ *справедливо соотношение*

$$|(\mathcal{L}x)(t) - w(t)| \leqslant k(t) + \beta(t)\|\widetilde{\xi}(\nu)\|_{C^1[a,b]},$$

где функции ν, $\widetilde{\xi}(\nu)$, *число* λ *определены соотношениями* (50), (57), (53)*, число* α, *функции* k, β *удовлетворяют неравенствам* (56), (4), (55).

***Замечание* 20.** Если $\mathcal{L}x = \dot{x}$, $lx = x(a)$, $\varphi(x) = x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}^n$), Φ – оператор Немыцкого, то оценки, установленные в теореме 10 и следствии 6 аналогичны оценкам, опубликованным в работах [6 – 8, 11, 14, 16, 20, 21]. Кроме того, эти результаты дополняют результаты [2, 3], поскольку не предполагают выпуклозначности отображения φ.

Рассмотрим вместе с задачей (47) и задачи

$$\mathcal{L}x \in \overline{\mathrm{co}}\Phi(x), \quad lx \in \varphi(x), \tag{58}$$
$$\mathcal{L}x \in (\mathrm{ext}\,\Phi)(x), \quad lx \in \varphi(x), \tag{59}$$

где многозначный оператор $\mathrm{ext}\,\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ определен равенством (21). Пусть H^1, H^1_{co}, H^1_{ext} – множество всех решений задач (47), (58), (59), соответственно.

Будем говорить, что оператор Грина $G: L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ и многозначные отображения $\varphi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* $\widetilde{C}$, если эти отображения обладают свойством $\widetilde{A}^*$ и сумма ряда (54) является непрерывной в точке 0.

Теорема 12. *Пусть оператор Грина* $G: L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ *многозначные отображения* $\varphi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* $\widetilde{C}$*. Тогда* $H^1_{\mathrm{ext}} \neq 0$ *и выполняется равенство*

$$\overline{H^1_{\mathrm{ext}}} = \overline{H^1} = H^1_{\mathrm{co}}. \tag{60}$$

***Замечание* 21.** Таким образом, теорема 11 устанавливает достаточные условия, при которых для задачи (47) выполняется «бэнг-бэнг» принцип.

Следствие 7. *Пусть оператор Грина* $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ *многозначные отображения* $\varphi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* $\widetilde{B}$. *Тогда* $H^1_{\mathrm{ext}} \neq \varnothing$ *и выполняется равенство* (60).

***Замечание* 22.** Отметим, что известные результаты о плотности множеств решений дифференциальных включений с невыпуклой и овыпукленной правыми частями и о «бэнг-бэнг» принципе (см. обзоры и монографии [6, 8, 11, 19 – 23, 31]), а также работы [7, 12 – 38, 29, 30, 39] касаются только задачи Коши для дифференциальных включений и предполагают в той или иной форме вольтерровость отображений $\mathcal{L}$ и Φ. В теореме 12 и следствии 7 вольтерровость этих отображений не предполагается. Кроме того, эти утверждения распространяют результаты работ [4, 5, 10] на случай когда линейный вектор-функционал l возмущен многозначным вектор-функционалом φ, а также распространяет результаты работ [2, 3] на случай, когда многозначный вектор-функционал φ имеет невыпуклые образы.

Пусть $\xi(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$, $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$.

Рассмотрим для каждого $\delta > 0$ задачу

$$\mathcal{L}x \in \Phi_\eta(x,\delta),\ lx \in \varphi(x)^{\xi(x,\delta)}, \tag{61}$$

где отображение $\Phi_\eta\colon C^n[a,b] \times [0,\infty) \to \Pi[L^n[a,b]]$ определено равенствами (28), (25). Задачу (61) будем называть *возмущенной краевой задачей с внешними возмущениями.*

Пусть $U \subset C^n[a,b]$. Обозначим через $H^1(U)$, $H^1_{\mathrm{co}}(U)$, $H^1_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)$ множества решений задач (47), (58), (61) принадлежащих множеству U, соответственно.

Будем говорить, что для задачи (47) на множестве $U \subset C^n[a,b]$ выполняется принцип плотности (условие плотности), если справедливо равенство

$$\overline{H^1(U)} = H^1_{\mathrm{co}}(U),$$

где $\overline{H^1(U)}$ – замыкание множества $H^1(U)$ в пространстве $C^n[a,b]$.

Теорема 13. *Пусть* U *– непустое замкнутое множество пространства* $C^n[a,b]$ *и* $\xi(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$. *Тогда для любой функции* $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times[0,\infty))$ *равномерно на множестве* $U \subset C^n[a,b]$ *оценивающей сверху относительно радиуса непрерывности* $\omega(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ *модуль непрерывности отображения* $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *порождающее оператор* $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, *справедливо равенство*

$$H^1_{\mathrm{co}}(U) = \bigcap_{\delta>0} \overline{H^1_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)},$$

где $\overline{H^1_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)}$ *– замыкание множества* $H^1_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)$ *в пространстве* $C^n[a,b]$.

Теорема 14. *Пусть* $\xi(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b]\times[0,\infty))$. *Если* U *– непустое замкнутое множество пространства* $C^n[a,b]$, *то для выполнения равенства*

$$\overline{H^1(U)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H^1_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)} \tag{62}$$

для любого радиуса внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times[0,\infty))$ *достаточно, а если* U *– непустое выпуклое компактное множество пространства* $C^n[a,b]$, *то и необходимо, выполнения принципа плотности на множестве* $U \subset C^n[a,b]$.

Следствие 8. *Пусть оператор Грина* $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ *многозначные отображения* $\varphi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* $\widetilde{A}^*$. *Тогда для любых* $(\eta(\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot)) \in K([a,b]\times[0,\infty))\times P(C^n[a,b]\times \times[0,\infty))$ *выполняется равенство* (62) *на множестве* $U = C^n[a,b]$.

4 Аппроксимация дифференциальных включений

Обозначим через $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ множество всех функций $\eta\colon [a,b]\times \times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, обладающих следующими свойствами: при каждых $(x,\delta)\in \in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ функция $\eta(\cdot,x,\delta)$ измерима; при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $\delta\in \in[0,\infty)$ функция $\eta(t,\cdot,\delta)$ непрерывна; для каждых $U\in\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta\in[0,\infty)$ существует такая суммируемая функция $m_{U,\delta}\colon [a,b]\to[0,\infty)$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $x\in U$ и $\tau\in[0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,x,\tau)\leqslant \leqslant m_{U,\delta}(t)$; при почти всех $t\in[a,b]$ и каждого $x\in\mathbb{R}^n$ выполняются равенства $\lim_{\substack{z\to x\\ \delta\to 0+0}}\eta(t,z,\delta)=\eta(t,x,0)=0$.

Заменим в определении множества $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ условие с) на аналогичное, но более сильное требование, в котором функция $m_{U,\delta}$ есть константа. Соответствующее этому требованию подмножество множества $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ обозначим через $\widetilde{K}([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$.

$P([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ – множество всех функций $\eta\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times \times[0,\infty)\to[0,\infty)$, обладающих всеми свойствами из множества функций $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, а также удовлетворяющих следующим условиям: для каждых $U\in\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta\in(0,\infty)$ найдутся такие числа $r(U,\delta)>0$ и $\beta(U,\delta)\geqslant 0$, что при почти всех $t\in[a,b]$ всех $x\in U$ число $r(U,\delta)$ удовлетворяет неравенству $r(U,\delta)\leqslant\eta(t,x,\delta)$, а для числа $\beta(U,\delta)$ при почти всех $t\in[a,b]$ всех $x\in U$ и $\tau\in[0,\delta]$ имеет место оценка $\eta(t,x,\tau)\leqslant\beta(U,\delta)$.

4.1 Аппроксимация с внешними возмущениями

Рассмотрим дифференциальное включение (11), которое для удобства чтения запишем снова
$$\dot{x}(t)\in F(t,x(t)),\quad t\in[a,b], \tag{63}$$
где отображение $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

Будем говорить, что абсолютно непрерывная функция $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ является *квазирешением включения* (63), если найдется такая последовательность абсолютно непрерывных функций $x_i:[a,b]\to\mathbb{R}^n, i=1,2\ldots$, обладающая свойством: $x_i\to \to x$ в $C^n[a,b]$ при $i\to\infty$; для любого $i=1,2\ldots$ и при почти всех $t\in[a,b]$ выполняется включение
$$\dot{x}_i(t)\in F(t,x(t)). \tag{64}$$

Пусть $V\subset C^n[a,b]$. Далее, будем предпологать, что если квазирешение $x\in \in V$, то найдется последовательность $x_i\to x$ в $C^n[a,b]$, $i\to\infty$, удовлетворяющая условию (64), что для любого $i=1,2\ldots$ $x_i\in V$.

Будем говорить, что многозначное отображение $\widetilde{F}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to \to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *аппроксимирует* отображение $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, если найдется такая функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $(x,\delta)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ выполняется оценка
$$h[F(t,x),\widetilde{F}(t,x,\delta)]\leqslant\xi(t,x,\delta). \tag{65}$$

Отображение $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *аппроксимирующим отображение* $F(\cdot,\cdot)$ или просто аппроксимирующим. Функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$

в неравенстве (65) определяет степень близости значения $\widetilde{F}(t,x,\delta)$ в точке $(t,x)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n$ к значению $F(t,x)$ для каждого фиксированного $\delta\in[0,\infty)$. Эту функцию $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *степенью аппроксимации отображения* $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *отображением* $\widetilde{F}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ или просто степенью аппроксимации.

Отметим, что если для отображения $\widetilde{F}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ функция $\widetilde{\xi}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ определена равенством

$$\widetilde{\xi}(t,x,\delta)=h[F(t,x),\widetilde{F}(t,x,\delta)] \tag{66}$$

и эта функция принадлежит множеству $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, то отображение $\widetilde{F}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ аппроксимирует отображение $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to$ $\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$. При этом функция $\widetilde{\xi}(\cdot,\cdot,\cdot)$, определенная равенством (66), является точной нижней гранью всех функций $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, удовлетворяющих при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $(x,\delta)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ неравенству (65). Поэтому функцию $\widetilde{\xi}(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ для отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ можно считать «идеальной» степенью аппроксимации. Отметим, что иногда установить «идеальную» степень аппроксимации $\widetilde{\xi}(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ для аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ сложно. Гораздо проще найти «какую-нибудь» степень аппроксимации $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times$ $\times[0,\infty))$, тем более, что во многих случаях этого достаточно, чтобы установить те или иные свойства множества решений дифференциального включения (см. ниже теоремы 15–21).

Отметим, что из определения аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $(x,\delta)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ вытекает оценка

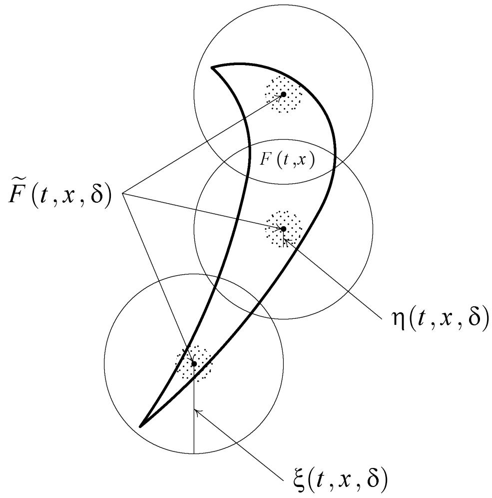
$$||\widetilde{F}(t,x,\delta)||\leqslant||F(t,x)||+\xi(t,x,\delta).$$

Поэтому для каждого $U\in\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta\in[0,\infty)$ для отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ существует такая суммируемая функция $m_{U,\delta}:[a,b]\to[0,\infty)$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $x\in U$ и $\tau\in[0,\delta]$ имеет место неравенство $||\widetilde{F}(t,x,\tau)||\leqslant$ $\leqslant m_{U,\delta}(t)$.

Пару $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ будем называть *аппроксимацией отображения* $F(\cdot,\cdot)$ или просто аппроксимацией. Если $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)=0$, то в этом случае для любых $(t,x,\delta)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ справедливо равенство $\widetilde{F}(t,x,\delta)=F(t,x)$ и поэтому $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),0)$ будем называть *«идеальной аппроксимацией»*. Пару $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ будем называть *аппроксимацией вложением*, если при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $(x,\delta)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ выполняется включение $F(t,x)\subset\widetilde{F}(t,x,\delta)$.

Для заданной степени аппроксимации $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ отображение $\widetilde{F}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, аппроксимирующее отображение $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, можно построить, например, взяв для каждых $(t,x)\in$ $\in[a,b]\times\mathbb{R}^n$ конечное множество всех центров шаров, принадлежащих значению $F(t,x)$.

При этом значение $\xi(t,x,\delta)$ является радиусами этих шаров или оценкой этих радиусов. Данный пример показывает, что каждое значение многозначного отображения $\widetilde{F}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, аппроксимирующее отображение $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, при каждом $\delta\in[0,\infty)$ может иметь достаточно «простую структуру». Будем считать, что $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ определяет способ или метод аппроксимации отображения $F(\cdot,\cdot)$.



Отметим, что сами значения аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ могут вычисляться с некоторой степенью точности (например, в рассмотренном выше примере центры шаров, покрывающие значения $F(t,x)$ $(t,x) \in \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$), которую можно задать некоторой функцией $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times \times [0,\infty))$. В связи с этим рассмотрим отображение $Q_\eta\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенное равенством

$$Q_\eta(t,x,\delta) = \widetilde{F}(t,x,\delta)^{\eta(t,x,\delta)}, \tag{67}$$

где функция $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ в каждой точке $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $\delta \in [0,\infty)$ определяет погрешность вычисления значений аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$, причем эти погрешности могут быть неравномерны относительно фазовой переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Далее, функцию $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *радиусом внешних возмущений аппроксимирующего отображения* $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ или просто радиусом внешних возмущений.

Заметим, что значения отображения $Q_\eta(\cdot,\cdot,\cdot)$, заданного равенством (67), могут быть и невыпуклыми множествами даже в том случае, когда значения отображения $F(\cdot,\cdot)$ – выпуклые множества. Кроме того, из определения отображения $Q_\eta(\cdot,\cdot,\cdot)$ и неравенства (65) при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $(x,\delta) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ следует оценка

$$h[F(t,x), Q_\eta(t,x,\delta)] \leqslant \xi(t,x,\delta) + \eta(t,x,\delta) \tag{68}$$

и, таким образом, внешнее возмущение $Q_\eta(\cdot,\cdot,\cdot)$ аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ есть снова аппрокимирующее отображение со степенью аппроксимации $\xi(\cdot,\cdot,\cdot) + \eta(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Кроме того, из оценки (68) вытекает, что для каждой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta\to 0+0} h[F(t,x), Q_\eta(t,x,\delta)] = 0. \tag{69}$$

Поэтому для заданной аппроксимации $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ все отображения $Q_\eta\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенные равенством (67) и зависящие от функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, близки (в смысле равенства (69)) к отображению $F: [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$, определяющему дифференциальное включение (63).

Пусть $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Рассмотрим при каждом фиксированном $\delta \in [0,\infty)$ дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in Q_\eta(t,x(t),\delta), \quad t \in [a,b], \tag{70}$$

где отображение $Q_\eta\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ задано равенством (67). Отметим, что правая часть дифференциального включения (70) может быть и невыпуклозначной. Дифференциальное включение (70) будем называть *аппроксимирующим дифференциальное включение* (63) *с внешними возмущениями.*

Каждое решение $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ дифференциального включения (70) по аналогии с [8] будем называть δ*-решением* (приближенным решением с точностью до δ или просто приближенным решением) *включения* (63).

Рассмотрим также дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in\mathrm{co}\,F(t,x(t)),\quad t\in[a,b]. \tag{71}$$

Пусть $V\subset C^n[a,b]$. Обозначим через $H(V)$ $(H_{\eta(\delta)}(V))$ множество решений (δ-решений) включения (63), а также через $H_{\mathrm{co}}(V)$ множество решений включения (71), принадлежащие заданному множеству V.

Будем говорить, что для дифференциального включения (63) на множестве $V\subset C^n[a,b]$ выполняется принцип плотности, если имеет место равенство

$$\overline{H(V)}=H_{\mathrm{co}}(V), \tag{72}$$

где $\overline{H(V)}$ – замыкание в пространстве $C^n[a,b]$ множества $H(V)$.

Пусть $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Определим функцию $\varphi(\psi)\colon [a,b]\times\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ равенством

$$\varphi(\psi)(t,x,\delta)=\sup_{y\in B[x,\psi(t,x,\delta)]}h[F(t,x),F(t,y)]. \tag{73}$$

Значения функции $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$ (см. [18]) в точке (t,x,δ) будем называть *модулем непрерывности отображения* $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ в точке (t,x) по переменной x в шаре $B[x,\psi(t,x,\delta)]$, функцию $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ – *функцией радиуса модуля непрерывности* или просто радиусом непрерывности, а саму функцию $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$ – *функцией модуля непрерывности* или просто модулем непрерывности отображения $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ относительно радиуса непрерывности $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$. Далее, для сокращения записи будем коротко писать $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$ – модуль непрерывности отображения $F(\cdot,\cdot)$.

Лемма 7. *Пусть* $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. *Тогда функция* $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$, *определенная равенством* (73)*, принадлежит множеству* $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$.

Пусть $V\subset C^n[a,b]$. Обозначим

$$U(V)=\{x(t)\in\mathbb{R}^n : x(\cdot)\in V,\ t\in[a,b]\}. \tag{74}$$

Теорема 15. *Пусть* $V\subset C^n[a,b]$ *– ограниченное замкнутое множество пространства* $C^n[a,b]$ *и пусть* $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)\in P([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. *Далее, пусть пара* $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ *аппроксимирует отображение* $F(\cdot,\cdot)$. *Тогда для любой функции* $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, *для которой существует такое число* $\varepsilon>0$, *что при почти всех* $t\in[a,b]$, *всех* $x\in(U(V))^\varepsilon$ *(см.* (74)*) и* $\delta\in[0,\infty)$ *имеет место неравенство*

$$\xi(t,x,\delta)+\varphi(\psi)(t,x,\delta)\leqslant\eta(t,x,\delta),$$

где $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$ *– модуль непрерывности, а* $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)$ *– степень аппроксимации отображения* $F(\cdot,\cdot)$, *выполняется соотношение*

$$H_{\mathrm{co}}(V)=\bigcap_{\delta>0}\overline{H_{\eta(\delta)}(V)}, \tag{75}$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}(V)}$ *– замыкание в пространстве* $C^n[a,b]$ *множества* $H_{\eta(\delta)}(V)$.

***Замечание* 23.** Из теоремы 15 и леммы 7 вытекает, что для любой степени аппроксимации $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)$ и заданного модуля непрерывности $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$ отображения $F(\cdot,\cdot)$ найдется такой радиус внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ аппроксимирующего отображение $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$, для которого выполняется равенство (75). Для этого достаточно положить $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) = \xi(\cdot,\cdot,\cdot) + \varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$. Отметим также, что модуль непрерывности $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$ отображения $F(\cdot,\cdot)$ зависит от радиуса непрерывности $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ и поэтому, подбирая радиус $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$, можно величину $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$ сделать достаточно малой. Таким образом, другими словами, теорема 15 утверждает, что если внешние возмущения $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ сравнимы со степенью аппроксимации $\xi(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ отображения $F(\cdot,\cdot)$, то справедливо равенство (75).

Теорема 16. *Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$. Пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$. Тогда для того, чтобы для любой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $(x,\delta) \in \overline{U(V)} \times [0,\infty)$* (см. (74))*, удовлетворяющей соотношению $\xi(t,x,\delta) \leqslant \eta(t,x,\delta)$, имело место равенство*

$$\overline{H(V)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V)}, \tag{76}$$

где $\overline{H(V)}$ – замыкание множества $H(V)$ в пространстве $C^n[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы для включения (63) *на множестве V выполнялся принцип плотности.*

***Замечание* 24.** Отметим, что из теоремы 16 и примера Плиса (см. [35, 8]) следует, что если внешние возмущения $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ больше или равны степени аппроксимации $\xi(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ отображения $F: [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, необладающего свойством выпуклости значений, то аппроксимация дифференциального включения (63), вообще говоря, может и не быть устойчивой, т. е. «небольшие» изменения правой части могут существенно изменить множество решений.

Будем говорить, что отображение $F: [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условию Липшица, если существует такая суммируемая функция $l: [a,b] \to [0,\infty)$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x,y \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$h[F(t,x), F(t,y)] \leqslant l(t)\,|x-y|.$$

Будем говорить, что функция $q: [a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ *обладает свойством* $\mathscr{A}$, если для любого $\delta \in [0,\infty)$ функция $q(\cdot,\delta)$ измерима, и для любого $\delta \in [0,\infty)$ найдется такая суммируемая функция $m_\delta: [a,b] \to [0,\infty)$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $\tau \in [0,\delta]$ выполняется неравенство $q(t,\tau) \leqslant m_\delta(t)$.

Будем говорить, что отображение $\widetilde{F}: [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *обладает свойством* $\mathscr{B}$, если при всех $(x,\delta) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ отображение $\widetilde{F}(\cdot,x,\delta)$ измеримо и существует такая функция $q: [a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающая свойством $\mathscr{A}$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x,y \in \mathbb{R}^n$ и $\delta \in [0,\infty)$ выполняется неравенство

$$h[\widetilde{F}(t,x,\delta), \widetilde{F}(t,y,\delta)] \leqslant q(t,\delta)\,|x-y|. \tag{77}$$

Это свойство мы будем использовать и для функций.

Пусть $M \in \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и пусть $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Обозначим через $H(M)$ и $H_{\eta(\delta)}(M)$ множество решений задачи Коши включений (63) и (70), начальные значения которых принадлежат множеству M, соответственно.

Теорема 17. *Пусть* $M \in \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *и пусть пара* $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ *аппроксимирует отображение* $F(\cdot,\cdot)$. *Далее, пусть отображение* $F(\cdot,\cdot)$ *удовлетворяет условию Липшица, а отображение* $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ *обладает свойством* $\mathscr{B}$. *Тогда для любой функции* $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ *имеют место равенства*

$$\overline{H(M)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(M)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(M^{\delta})},$$

где $\overline{H(M)}$, $\overline{H_{\eta(\delta)}(M)}$, $\overline{H_{\eta(\delta)}(M^{\delta})}$ *– замыкания в пространстве* $C^n[a,b]$ *соответствующих множеств.*

Если пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n \to \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ вложением, теоремы 15, 16 можно уточнить.

Теорема 18. *Пусть* V *– ограниченное замкнутое множество пространства* $C^n[a,b]$ *и пусть* $\psi(\cdot,\cdot,\cdot) \in P([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. *Далее, пусть пара* $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ *аппроксимирует отображение* $F(\cdot,\cdot)$ *вложением. Тогда для любой функции* $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, *для которой существует такое число* $\varepsilon>0$, *что при почти всех* $t\in[a,b]$ *и всех* $x \in \overline{U(V)}^{\varepsilon}$ *(см.* (74)) *и* $\delta\in[0,\infty)$ *выполняется оценка*

$$\varphi(\psi)(t,x,\delta) \leqslant \eta(t,x,\delta),$$

справедливо равенство (75).

Теорема 19. *Пусть* V *– ограниченное замкнутое множество пространства* $C^n[a,b]$. *Далее, пусть пара* $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ *аппроксимирует отображение* $F(\cdot,\cdot)$ *вложением. Тогда для того, чтобы для любой функции* $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times \times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ *имело место равенство* (76)*, необходимо и достаточно, чтобы для включения* (63) *на множестве* V *выполнялся принцип плотности.*

4.2 Аппроксимация с внутренними и внешними возмущениями

4.2.1 Общий случай

Пусть $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Определим функцию $\xi(\eta_0)\colon[a,b]\times \times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ равенством

$$\xi(\eta_0)(t,x,\delta) = \sup_{z\in B[x,\eta_0(t,x,\delta)]} \xi(t,z,\delta). \tag{78}$$

Лемма 8. *Пусть* $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. *Тогда функция* $\xi(\eta_0)(\cdot,\cdot,\cdot)$, *заданная равенством* (78)*, принадлежит множеству* $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times \times[0,\infty))$.

Отметим, что аппроксимирующее дифференциальное включение (63) с внешними возмущениями (включение (70)), определяется погрешностями вычисления значений отображения $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ (правой части включения (63)), которые задаются парой $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$, и погрешностями вычисления значений самого аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$. В то же время каждое решение $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ включения (70) может также вычисляться с некоторой степенью точности, которую можно задать некоторой функцией $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. В связи с этим рассмотрим отображение $\widetilde{F}_0\colon[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенное равенством

$$\widetilde{F}_0(t,x,\delta) = \overline{\widetilde{F}(t,B[x,\eta_0(t,x,\delta)],\delta)}, \tag{79}$$

где функция $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ в каждой точке $(t, x(t)) \in [a,b] \times \times \mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $\delta \in [0,\infty)$ задает погрешность вычисления значения решения $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ в точке $t \in [a,b]$ дифференциального включения (70), причем эти погрешности могут быть неравномерны относительно фазовой переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Далее, функцию $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *радиусом внутренних возмущений аппроксимирующего отображения* $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ или просто радиусом внутренних возмущений.

Лемма 9. *Пусть* $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ *и пара* $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ *аппроксимирует отображение* $F(\cdot,\cdot)$. *Тогда для отображения* $\widetilde{F}_0 \colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *заданного равенством* (79), *при почти всех* $t \in [a,b]$ *и всех* $(x,\delta) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ *справедливы соотношения*

$$\|\widetilde{F}_0(t,x,\delta)\| \leqslant \sup_{z \in B[x,\eta_0(t,x,\delta)]} \|F(t,z)\| + \xi(\eta_0)(t,x,\delta)$$

$$h[F(t,x), \widetilde{F}_0(t,x,\delta)] \leqslant \xi(\eta_0)(t,x,\delta) + \varphi(\eta_0)(t,x,\delta),$$

где функция $\xi(\eta_0)(\cdot,\cdot,\cdot)$ *определена равенством* (78), *а* $\varphi(\eta_0)(\cdot,\cdot,\cdot)$ *– модуль непрерывности отбражения* $F(\cdot,\cdot)$ *относительно радиуса непрерывности* $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Теорема 20. *Пусть* $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ *и пара* $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ *аппроксимирует отображение* $F(\cdot,\cdot)$. *Тогда отображение* $\widetilde{F}_0(\cdot,\cdot,\cdot)$, *заданное равенством* (79), *аппроксимирует отображение* $F(\cdot,\cdot)$ *со степенью аппроксимации* $\xi(\eta_0)(\cdot,\cdot,\cdot) + \varphi(\eta_0)(\cdot,\cdot,\cdot)$, *где функция* $\xi(\eta_0)(\cdot,\cdot,\cdot)$ *определена равенством* (78), *а* $\varphi(\eta_0)(\cdot,\cdot,\cdot)$ *– модуль непрерывности отображения* $F(\cdot,\cdot)$ *относительно радиуса непрерывности* $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Лемма 10. *Пусть отображения* $\widetilde{F} \colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *и* $\eta_0 \colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ *обладают свойством* $\mathscr{B}$, *которые удовлетворяют неравенству* (77) *с функциями* $q \colon [a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ *и* $\widetilde{q} \colon [a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, *обладающими свойством* $\mathscr{A}$, *соответственно, причем функция* $\widetilde{q}(\cdot,\cdot)$ *ограничена при каждом ограниченном изменении второго аргумента. Тогда для отображения* $\widetilde{F}_0 \colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *определенного равенством* (79), *при почти всех* $t \in [a,b]$ *и всех* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *и* $\delta \in [0,\infty)$ *имеет место оценка*

$$h[\widetilde{F}_0(t,x,\delta), \widetilde{F}_0(t,y,\delta)] \leqslant q(t,\delta)(1 + \widetilde{q}(t,\delta))\,|x-y|\,.$$

Пусть $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Рассмотрим отображение $Q_{\eta_0\eta} \colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенное равенством

$$Q_{\eta_0\eta}(t,x,\delta) = (\widetilde{F}_0(t,x,\delta))^{\eta(t,x,\delta)}. \tag{80}$$

Согласно теореме 20 для отображения $Q_{\eta_0\eta}(\cdot,\cdot,\cdot)$ из неравенства (68) при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $(x,\delta) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ имеем

$$h[F(t,x), Q_{\eta_0\eta}(t,x,\delta)] \leqslant \xi(\eta_0)(t,x,\delta) + \varphi(\eta_0)(t,x,\delta) + \eta(t,x,\delta).$$

Таким образом, из данной оценка вытекает, что отображение $Q_{\eta_0\eta}(\cdot,\cdot,\cdot)$, заданное равенством (80), аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$ со степенью аппроксимации $\xi(\eta_0)(\cdot,\cdot,\cdot) + \varphi(\eta_0)(\cdot,\cdot,\cdot) + \eta(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Отметим, что для каждых функций $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta\to 0+0} h[F(t,x), Q_{\eta_0\eta}(t,x,\delta)] = 0.$$

Рассмотрим при каждом фиксированном $\delta \in [0,\infty)$ дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in Q_{\eta_0\eta}(t,x(t),\delta), \quad t \in [a,b], \tag{81}$$

где отображение $Q_{\eta_0\eta}\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ определено равенством (80). Дифференциальное включение (81) будем называть аппроксимирующим дифференциальное включение (63) с внутренними и внешними возмущениями.

Пусть $V \subset C^n[a,b]$. Обозначим $H_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(V)$ множество решений включения (81), принадлежащих заданному множеству V.

Из теорем 15–20 и лемм 8–10 вытекают следствия:

Следствие 9. *Пусть $V \subset C^n[a,b]$ – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$ и пусть $\psi(\cdot,\cdot,\cdot) \in P([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty)), \eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Далее, пусть $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$. Тогда для любой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, для которой существует такое число $\varepsilon > 0$, что при почти всех $t \in [a,b]$ всех $x \in (U(V))^{\varepsilon}$ (см. (74)) и $\delta \in [0,\infty)$ имеет место неравенство*

$$\xi(\eta_0)(t,x,\delta) + \varphi(\eta_0)(t,x,\delta) + \varphi(\psi)(t,x,\delta) \leqslant \eta(t,x,\delta),$$

где функция $\xi(\eta_0)(\cdot,\cdot,\cdot)$ определена равенством (78), $\varphi(\cdot)(\cdot,\cdot,\cdot)$ – модуль непрерывности отображения $F(\cdot,\cdot)$ относительно радиусов непрерывности $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$, выполняется соотношение

$$H_{\mathrm{co}}(V) = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(V)}, \tag{82}$$

где $\overline{H_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(V)}$ – замыкание в пространстве $C^n[a,b]$ множества $H_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(V)$.

Следствие 10. *Пусть $V \subset C^n[a,b]$ – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$ и $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Далее, пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$. Тогда для того, чтобы для любой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $(x,\delta) \in \overline{U(V)} \times [0,\infty)$ (см. (74)), удовлетворяющей соотношению*

$$\xi(\eta_0)(t,x,\delta) + \varphi(\eta_0)(t,x,\delta) \leqslant \eta(t,x,\delta),$$

где функция $\xi(\eta_0)(\cdot,\cdot,\cdot)$ определена равенством (78), $\varphi(\eta_0)(\cdot,\cdot,\cdot)$ – модуль непрерывности отображения $F(\cdot,\cdot)$ относительно радиуса непрерывности $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot)$, имело место равенство

$$\overline{H(V)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(V)}, \tag{83}$$

необходимо и достаточно, чтобы для включения (63) на множестве V выполнялся принцип плотности.

Пусть $M \in \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и пусть $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Обозначим через $H_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(M)$ множество решений задачи Коши включения (81), начальные значения которых принадлежат множеству M.

Следствие 11. *Пусть $M \in \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$. Далее, пусть отображение $F(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица, а отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot)$ удовлетворяют лемме 10. Тогда для любой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ имеют место равенства*

$$\overline{H(M)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(M)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(M^{\delta})},$$

где $\overline{H_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(M)}$, $\overline{H_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(M^{\delta})}$ – замыкания в пространстве $C^n[a,b]$ соответствующих множеств.

Следствие 12. *Пусть $V \subset C^n[a,b]$ – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$, $\psi(\cdot,\cdot,\cdot) \in P([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Далее, пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$ вложением. Тогда для любой функции $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ и любой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, для которой существует такое число $\varepsilon > 0$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $(x,\delta) \in (U(V))^{\varepsilon} \times [0,\infty)$ (см.* (74)*) выполняется оценка*

$$\varphi(\psi)(t,x,\delta) \leqslant \eta(t,x,\delta),$$

справедливо равенство (82)*.*

Следствие 13. *Пусть $V \subset C^n[a,b]$ – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$. Далее, пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$ вложением. Тогда для того, чтобы для любой функции $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ имело место равенство* (83)*, необходимо и достаточно, чтобы для включения* (63) *на множестве V выполнялся принцип плотности.*

4.2.2 Аппроксимация вложением и с положительной оценкой снизу радиуса внутренних возмущений

Здесь предполагается, что радиус внутренних возмущений $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in P([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$ вложением.

Напомним, что согласно определению множества $P([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ функция $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию: для каждого компакта $U \subset \mathbb{R}^n$ существует константа $r(U,\delta) > 0$ такая, что $r(U,\delta) \leqslant \eta_0(t,x,\delta)$ $\forall x \in U$. В этом и состоит положительность оценки снизу радиуса внутренних возмущений.

Пусть аппроксимирующее отображение $\widetilde{F}: [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ обладает свойством: для любых $(x,\delta) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ $\widetilde{F}(\cdot,x,\delta)$ измеримо; при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $\delta \in [0,\infty)$ $\widetilde{F}(t,\cdot,\delta)$ непрерывно (это свойство ниже для отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть условия Каратеодори). В этом случае, как оказалось, следствие 12 можно уточнить.

Пусть $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in P([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Определим отображения $\Phi: [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi_{\eta_0\eta}: [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ равенствами

$$\Phi(t,x,\delta) = \overline{\mathrm{ext}}(\mathrm{co}\,\widetilde{F}(t,x,\delta)), \tag{84}$$

$$\Phi_{\eta_0\eta}(t,x,\delta) = (\Phi(t, B[x,\eta_0(t,x,\delta)],\delta))^{\eta(t,x,\delta)}, \tag{85}$$

где в (84) $\overline{\mathrm{ext}}(\cdot)$ – замыкание множества крайних точек соответствующего множества. Для каждого фиксированного $\delta > 0$ рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in \Phi_{\eta_0\eta}(t, x(t), \delta), \quad t \in [a, b], \tag{86}$$

где отображение $\Phi_{\eta_0\eta}\colon [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ определено равенствами (84), (85). Дифференциальное включение (86) будем называть аппроксимирующим дифференциальное включение (63), определенное по крайним точкам значений аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$, с внутренними и внешними возмущениями.

Пусть $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(V)$ – множество решений включения (86), принадлежащих множеству $V \subset C^n[a, b]$, при фиксированном $\delta > 0$.

Отметим, что поскольку для любых $(t, x, \delta) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ выполняется включение $\Phi_{\eta_0\eta}(t, x, \delta) \subset Q_{\eta_0\eta}(t, x, \delta)$, где отображения $\Phi_{\eta_0\eta}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $Q_{\eta_0\eta}(\cdot,\cdot,\cdot)$ определены равенствами (85) и (80), соответственно, то $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(V) \subset$ $\subset H_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(V)$.

Теорема 21. *Пусть* V *– замкнутое множество пространства* $C^n[a, b]$, $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in P([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. *Далее, пусть пара* $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ *аппроксимирует отображение* $F(\cdot,\cdot)$ *вложением и* $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда для любой функции* $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ *справедливы равенства*

$$H_{\mathrm{co}}(V) = \bigcap_{\delta>0} \overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(V)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(V)},$$

где $\overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(V)}$ *– замыкание в пространстве* $C^n[a, b]$ *множества* $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta),\eta(\delta)}(V)$.

***Замечание* 25.** Отметим, что теоремы 15–21 и следствия 9–13 обобщают и уточняют результаты работ [4, 17,18, 25, 26, 27, 39].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №01-01-00140; №04-01-00324), Министерства Образования РФ (грант №E02-1.0-212)

Список литературы

1. Булгаков А.И. О некоторых задачах возмущенных включений и их приложениях к дифференциальным включениям. / А.И. Булгаков, Н.П. Пучков, В.В. Скоморохов, А.А. Григоренко, О.П. Беляева // Вестн. ТГТУ. Тамбов, 2004. Т. 10. №. 3. С. 712–730.

2. Булгаков А.И. Некоторые результаты по теории возмущений многозначных операторов с выпуклыми замкнутыми значениями отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и их приложения / А.И. Булгаков, Л.И. Ткач // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 1997. Т. 2. Вып. 2. С. 111–120.

3. Булгаков А.И. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений / А.И. Булгаков, Л.И. Ткач // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 6. С. 3–32.

4. Булгаков А.И. Возмущение однозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами / А.И. Булгаков, Л.И. Ткач // Изв. вузов. Мат. 1999. № 3. С. 3–16.

5. Булгаков А.И. Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения I, II, III / А.И. Булгаков // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С.371–379; Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 4. С.566–571; Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С.739–746.

6. Благодатских В.И. Дифференциальные включения и оптимальное управление / В.И. Благодатских, А.Ф. Филиппов // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.

7. Филиппов А.Ф. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью / А.Ф. Филиппов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1967. № 3. С. 16–26.

8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. М.: Наука, 1985.

9. Функциональный анализ. (СМБ). / Под общ. ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.

10. Булгаков А.И. Интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения к краевым задачам дифференциальных включений / А.И. Булгаков // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 10. С. 63–86.

11. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве / А.А. Толстоногов. Новосибирск: Наука, 1986. 296 с.

12. Суслов С.И. Нелинейный бэнг-бэнг принцип I. Конечномерный случай / С.И. Суслов. Новосибирск, 1989. С. 14. (Препр. / АН СССР СО Ин-т мат.; № 11).

13. Суслов С.И. Нелинейный бэнг-бэнг принцип II. Бесконечномерный случай / С.И. Суслов. Новосибирск, 1989. С. 18. (Препр. / АН СССР СО Ин-т мат.; №12).

14. Толстоногов А.А. О множестве решений дифференциального включения в банаховом пространстве / А.А. Толстоногов, П.И. Чугунов // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. № 6. С. 144–159.

15. Толстоногов А.А. О решениях дифференциального включения с полунепрерывной снизу невыпуклой правой частью в банаховом пространстве / А.А. Толстоногов, И.А. Финогенко // Матем. сб. 1984. Т. 125. № 2. С. 199–230.

16. Чугунов П.И. Свойства решений дифференциальных включений и управляемые системы / П.И. Чугунов // Прикл. матем. и пакеты прикл. программ / СЭИСО АН СССР. Иркутск, 1980. С. 155–179.

17. Булгаков А.И. К вопросу устойчивости дифференциальных включений / А.И. Булгаков, А.А. Ефремов, Е.А. Панасенко // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 1999. Т. 4, вып. 4. С. 461–470.

18. Булгаков А.И. Обыкновенные дифференциальные включения с внутренними и внешними возмущениями / А.И. Булгаков, А.А. Ефремов, Е.А. Панасенко // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1587–1598.

19. Субботин А.И. Оптимизация гарантии в задачах управления / А.И. Субботин, А.Г. Ченцов. М.: Наука, 1981.

20. Половинкин Е.С. Теория многозначных отображений / Е.С. Половинкин. М.: МФТИ, 1982.

21. Благодатских В.И. Некоторые результаты по теории дифференциальных включений / В.И. Благодатских // Summer School on Ordinary Differential Equations. Czechoslovakia, Brno, 1974. Part II. P. 29–67.

22. Благодатских В.И. Теория дифференциальных включений / В.И. Благодатских. М.: МГУ, 1979. Часть I.

23. Борисович Ю.Г. Введение в теорию многозначных отображений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. Воронеж: ВГУ, 1986. 103 с.

24. Натансон И.Т. Теория функций вещественной переменной / И.Т. Натансон. М., 1974.

25. Булгаков А.И. Асимптотическое представление множеств δ-решений диф-

ференциального включения / А.И. Булгаков // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 5. С. 775–778.

26. Булгаков А.И. Дифференциальные включения с внешними возмущениями, радиус которых зависит от фазовой переменной / А.И. Булгаков, В.В. Скоморохов // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и технич. науки. Тамбов, 2000. Т. 5. Вып. 4. С. 429–430.

27. Ефремов А.А. Устойчивость периодических и двухточечных краевых задач относительно внешних возмущений / А.А. Ефремов, Е.А. Панасенко // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и технич. науки. Тамбов, 2000. Т. 5. Вып. 4. С. 446–447.

28. Азбелев Н.В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. М.: Наука, 1991. 280 с.

29. Булгаков А.И. Непрерывные ветви многозначных отображений с невыпуклыми образами и функционально-дифференциальные включения / А.И. Булгаков // Матем. сб. 1990. Т. 181. №11. С. 1427–1442.

30. Булгаков А.И. Функционально-дифференциальные включения с невыпуклой правой частью / А.И. Булгаков // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. №11. С. 1872–1878.

31. Булгаков А.И. Некоторые вопросы дифференциальных и интегральных включений с невыпуклой правой частью // В сб. «Функционально-дифференциальные уравнения». Пермь: ППИ, 1991. С. 28–57.

32. Арутюнов А.В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. / А.В. Арутюнов. М.: «Факториал», 1997. 254 с.

33. Арутюнов А.В. Принцип максимума для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями / А.В. Арутюнов, В.И. Благодатских // Тр. МИАН СССР. 1991. Т. 200. С. 4–26.

34. Арутюнов А.В. Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления дифференциальным включением с фазовыми ограничениями / А.В. Арутюнов, С.М. Асеев, В.И. Благодатских // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 6 С. 3–32.

35. Plis A. Traejectories and Quasitrajectories of an Orientor Field / Plis A. // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. math. Astron. Phys. 1963. V. 11. № 6. P. 369–370.

36. Bressan A. On a Bang-Bang Principle for Nonlinear Systems / Bressan A. // Boll. Unione Math. Italiana, suppl. 1980. V. 1. P. 53–59.

37. Hermes H. On Continuous and Measurable Selections and the Existence of Solutions of Generalized Differential Equations / Hermes H. // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 29. № 3. P. 535–542.

38. Pianigiani G. On the Fundamental Theory of Multivalued Differential Equations / Pianigiani G. // J. Different. Equations. 1977. V. 25. № 1. P. 30–38.

39. Hermes H. The Generalised Differential Equation $\dot{x}(t) \in R(t,x)$ / Hermes H. // Advances Math. 1970. V. 4. № 2. P. 149–169.

40. Turowicz A. Remarque sur la definition des quasitrajectoires d'un system de commande nonlineaire / Turowicz A. // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. math., astr., phys. 1963. V. 11. № 6. P. 367–368.

To Some Problems of Disturbed Inclusions and their Applications to Differential Inclusions. Part 2

A.I. Bulgakov[2], N.P. Puchkov[1], V.V. Skomorokhov[1], A.A. Grigorenko[2], O.P. Belyaeva[2]

Depatrments: Higher Mathematics, TSTU (1);
Algebra and Geometry, TSU after G.R. Derzhavin (2)

Key words and phrases: approximation of differential inclusions; disturbed inclusions; differential inclusions; boundary task of functional differential inclusions; multi-valued maps; functional inclusions.

Abstract: Inclusion the first part of which consists of algebraic sum of "positive" values (having closed images) and "negative" ones (not possessing closed and convex values) of multi-valued maps is studied. Such inclusions are called disturbed. Fundamentals of the theory of these inclusions are formulated in the first part of the paper; thus it is proved that set of solutions for such inclusions can lose the property of stability ("minor" variations in the first part can cause the significant change in solutions set). The condition which is necessary and sufficient for the property of stability of solutions set is formulated The results obtained in the first part of the work are applied to the study of boundary task of functional differential inclusions, approximation of differential inclusions.

Über einige Aufgaben der empörten Inklusions und ihre Anwendungen zu den Differentialinklusions. Teil 2

Zusammenfassung: Es wird die Inklusion, deren rechter Teil aus der algebraischen Summe der Bedeutungen "des Gutes" (hat die geschlossenen Gestalten) und "des Schlechtes" (verfügt über die Eigenschaft der Verschlossenheit und die Konvexität der Bedeutungen nicht) der bedeutungsvollen Abbilder besteht, studiert. Solche Inklusions sind empört. In den ersten Teil des Artikels sind die Grundlagen der Theorie solcher Inklusions formuliert. Hier wird bewiesen, daß die Menge der Lösung solcher Inklusions die Eigenschaft der Stabilität (Die "kleinen" Veränderungen des rechten Teiles können zur wesentlichen Veränderung der Menge der Lösungen führen) verlieren kann. Es ist die notwendige und ausreichende Bedingung, wann die Eigenschaft der Stabilität der Lösungsmenge erfüllt wird, formuliert. Dann werden die in den ersten Teil der Arbeit bekommenen Ergebnisse für die Forschung der Ortsaufgaben der Funktionaldifferentialinklusions, der Approximation der Differentialinklusions verwendet.

Sur quelques problèmes des inclusions perturbées et ses applications vers les inclusions différentionnelles. 2-ième partie

Résumé: Sont étudiées les inclusions dont la partie droite se compose de la somme algébraïque des valeurs du «bien» (ayant les images fermées) et du «mal» (n'ayant pas de propriété de ferméture et de l'inclusion des valeurs) des applications à

plusieures valeurs. Ces inclusions sont appelées perturbées. Dans la première partie de l'article sont formulées les bases de la théorie de ces inclusions. On a prouvé que la multitude des solutions des inclusions peut perdre propriété de la stabilité (de «petits» changements de la partie droite peuvent aboutir au changement de la multitude des solutions). Est formulée une condition nécessaire et importante lorsque la propriété de la stabilité des solutions est respectée. Ensuite les résultats reçus dans la première partie de l'ouvrage sont appliqués pour l'étude des problèmes aux limites des inclusions fonctionnelles différencielles, de l'approximation des inclusion différentielles.