УДК 536.77

ТЕРМОГИДРОАКУСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В АППАРАТАХ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ГОРЕНИЯ

В.И. Быченок[1], Н.В. Мозговой[2]

Кафедра гидравлики и теплотехники, ТГТУ (1);
кафедра теплотехники и промышленной теплоэнергетики,
Воронежский государственный технический университет (2)

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: аппараты пульсирующего горения; метод Ляпунова; метод Лагранжа; термогидроакустическая устойчивость.

Аннотация: Рассматривается проблема расчета термогидроакустической устойчивости автоколебательного возмущенного движения реагирующего газа в камерах сгорания теплоэнергетических установок, которое возникает в результате воздействия на рабочее тело акустических и тепловых возмущений. Для определения границ устойчивости анализируется возможность нахождения для таких систем функции Ляпунова и функции Лагранжа. Проводится сравнительный анализ применения их к процессам в энергетических установках. Показано, что в аппаратах пульсирующего горения с аэродинамическим клапаном для определения границ термогидроакустической устойчивости с успехом можно использовать метод Лагранжа. На основе этого метода получено уравнение для расчета резонансной частоты. Уравнение позволяет также решать задачу оптимизации геометрических размеров.

Традиционные требования, предъявляемые к теплоэнергетическим установкам, можно сконцентрировать в ключевых словах: экономичность, экология, простота и надежность. Всем этим требованиям в полной мере соответствуют теплоэнергетические установки, в которых реализуется механизм пульсирующего горения топлива [1]. Однако расчет их конструктивных размеров неразрывно связан с условиями устойчивости колебаний при горении. С физической точки зрения такой вид колебаний описывается системой нелинейных уравнений, а сами системы называются нелинейными. Дело в том, что «линейность» редко бывает свойством, присущим самой системе, в большинстве случаев линейность есть результат упрощения реальной системы. Класс нелинейных систем бесконечно шире и многообразнее, чем узкая область искусственно построенных линейных систем. Отметим некоторые существенные отличия в свойствах нелинейных и линейных систем. В линейных системах строго периодические колебания возможны только в форме вынужденных колебаний, возникающих от действия внешних периодических возмущающих сил. В то же время в нелинейных системах возможны периодические устойчивые свободные колебания даже при наличии сопротивления. При этом потери энергии автоматически компенсируются поступлениями ее из не колебательного источника. Дозировка поступления энергии во времени и по величине регулируется самой колеблющейся системой. Такие системы называют автоколебательными. В нелинейных системах частота бóльшей частью зависит от амплитуды колебаний, а в линейных системах такой зависимости нет. Поэтому простая линейная трактовка задачи о колебаниях не только не дает возможности раскрыть важные свойства колебательной системы, но и может существенно исказить реальную картину периодического процесса.

В то же время некоторые свойства нелинейных систем позволяют использовать для решения задачи ее устойчивости математический аппарат линейных систем. Так, например, для исследования малых колебаний упругих систем около положения устойчивого равновесия используют систему линейных уравнений. При этом пренебрегают членами, нелинейными относительно возмущений. Некоторые автоколебательные системы так же можно исследовать методами, характерными для линейных систем, если известна математическая зависимость механизма обратной связи. Так как в линейных системах собственная частота не зависит от начальных условий, и, в частности, от амплитуды, то ее изменение возможно только путем существенных изменений конструкции системы или перераспределением в ней масс. Это свойство позволяет использовать собственную частоту автоколебательной системы в качестве определяющего параметра, который можно задавать при проектировании аппарата пульсирующего горения на заданную тепловую мощность. Следовательно, трактовка периодических процессов в линейном приближении требует проведения подробного предварительного анализа механизма колебаний и введения обоснованных ограничений, чтобы математическое описание отражало действительную физическую картину поведения системы.

Так как горение является основным процессом всех энергетических установок, то исследование устойчивости этого процесса является основополагающей задачей. Решению этой задачи посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ. Наиболее подробный теоретический анализ проведен в работе К.И. Артамонова [2], где доказана принципиальная возможность линеаризация дифференциальных уравнений для возмущений. Доказательство базируется на том, что возмущения давления являются результатом возникновения акустических волн, а по амплитуде такие колебания можно считать малыми. В этом случае устойчивость описывается на основе фундаментальной теории Ляпунова для сплошной среды. Функция Ляпунова Z в области устойчивого возмущенного движения обладает следующими свойствами

$$Z > 0, \ \dot{Z} \le 0 . \tag{1}$$

В работе [2] показано, что для исследования процесса горения на устойчивость в качестве функции Ляпунова можно использовать полную энергию потока реагирующего газа E и воспользоваться нестационарной составляющей ее субстанциональной производной

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = -\int_{\Sigma} \delta p \delta w d\Sigma + \int_{V} \beta \frac{\delta Q}{\rho c_p} \delta p dV , \tag{2}$$

где δp, δw, δQ – возмущения давления, скорости и теплового потока; β – термический коэффициент расширения; Σ – контрольная поверхность; V – исследуемый объем; ρ – плотность; c_p – изобарная теплоемкость.

Рассмотрим физический смысл величин, входящих в уравнение (2). Под энергией понимается выражение следующего вида

$$E = \int_V \left[\delta u + \delta \left(\frac{\rho w^2}{2} \right) \right] dV , \qquad (3)$$

т.е. рассматривается сумма внутренней и кинетической энергий в возмущенном состоянии объема. Последний интеграл в (2) представляет собой критерий Релея, определяющий наиболее вероятные условия возбуждения акустических колебаний за счет периодического подвода тепла к объему. Наилучшие условия для возникновения колебаний будут при несовпадении фаз колебаний давления и скорости теплообмена. При наличии фазового сдвига φ между колебаниями, которые подчиняются гармоническому закону $\delta p = A_p \cos \omega\tau$ и $\delta Q = A_Q \cos(\omega\tau - \varphi)$, интегрирование по периоду колебаний дает приращение акустической энергии равное

$$\delta E_{\text{ак}} = \frac{T}{2} \cos\varphi \int_V \beta \frac{A_p A_Q}{\rho c_p} dV . \qquad (4)$$

Очевидно, что усиление акустических колебаний возможно, если фазовый сдвиг между δp и δQ удовлетворяет условию $|\varphi| < \pi/2$. Последний интеграл в (2) можно записать в другом виде

$$\int_V \beta \frac{\delta Q}{\rho c_p} \delta p dV = \int_V \frac{\beta T}{c_p} \frac{d(\delta s)}{d\tau} \delta p dV . \qquad (5)$$

Производная от вариации энтропии в (5) равна вариации от ее производной т.е. $\frac{d(\delta s)}{d\tau} = \frac{\delta(ds)}{d\tau}$. В общем случае объем, в котором происходит горение, представляет собой открытую термодинамическую систему. Поэтому изменение энтропии в нем складывается из производства энтропии за счет внутренних процессов и потока энтропии через контрольную поверхность

$$\frac{ds}{d\tau} = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)_e + \left(\frac{ds}{d\tau} \right)_i . \qquad (6)$$

Единственный самопроизвольный процесс, который обычно учитывают при горении, – это образование продуктов сгорания вследствие химических реакций. В большинстве случаев этот процесс можно считать равновесным, поэтому производство энтропии $(ds / d\tau)_e = 0$. В то же время для учета реальных физических явлений объем, в котором происходит горение, надо считать открытой системой. Это означает, что изменение энтропии в ней вызывают колебания скорости подвода массы вещества. В связи с этим автор работы [2] отмечает, что колебательный подвод массы и колебательный подвод тепла эквивалентны с точки зрения возбуждения акустических колебаний, т.к.

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{M}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{Q}{\rho c_p T} \right) \quad \text{и} \quad \int_V \beta T \frac{\delta Q}{\rho c_p T} \delta p dV = \int_V \frac{\beta T}{c_p} \delta \left(\frac{ds}{d\tau} \right)_i \delta p dV \neq 0. \qquad (7)$$

В зависимости от реальных факторов знак потока энтропии может быть < 0, > 0 или = 0. Поэтому априори знак интеграла (7) не определяется. Акустические волны, описываемые уравнением (7) часто называют «энтропийными волнами».

Физический смысл первого интеграла в правой части уравнения (2) подробно раскрыт в работе Б.В. Раушенбаха [3]. Поэтому здесь приведем только основные моменты.

Рассматривается канал постоянного сечения, в некотором объеме которого происходит горение. Зона горения ограничена двумя неподвижными сечениями: входное – 1 и выходное – 2. Пусть в одномерном потоке возникли возмущения, в результате которых давление и скорость получают отклонения от их стационарных значений. Величины отклонений определяются на основе гармонического закона $\delta p = |\delta p| \sin(\omega\tau)$ и $\delta w = |\delta w| \sin(\omega\tau + \varphi)$, где φ – сдвиг фаз между возмущениями скорости и давления. Очевидно, что $|\delta p| = A_p$ и $|\delta w| = A_w$ являются амплитудами. Тогда текущие параметры возмущенного потока будут $p = p_0 + \delta p$ и $w = w_0 + \delta w$. Для анализа возмущенного движения произведение pw разлагают в ряд

$$pw = p_0 w_0 + p_0\,\delta w + w_0\,\delta p + \delta w \delta p. \tag{8}$$

Интегрирование (8) за период колебания $T = 2\pi/\omega$ дает нам среднее значение произведения $(pw)_{\text{ср}}$

$$(pw)_{\text{ср}} = p_0 w_0 + \frac{1}{T}\int_0^T \delta w \delta p d\tau\,. \tag{9}$$

Поток энергии $p_0 w_0$ не связан с колебаниями, т.к. соответствует стационарному течению (или фону). Учитывая гармонический закон для возмущений δw и δp, выполним операцию интегрирования (9) за промежуток времени $\tau = T$ и получим

$$\Delta(pw) = (pw)_{\text{ср}} - p_0 w_0 = \frac{1}{2}|\delta p|\cdot|\delta w|\cos\varphi\,. \tag{10}$$

Выражение (10) Б.В. Раушенбах называет потоком акустической энергии через сечение и вводит обозначение

$$A \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \delta w \delta p d\tau = \frac{1}{2}|\delta w|\cdot|\delta p|\cos\varphi\,. \tag{11}$$

Отсюда следует первый вывод, что если в рассматриваемом сечении устанавливается узел давления ($\delta p = 0$) или узел скорости ($\delta w = 0$), то поток акустической энергии равен нулю. Второй важный вывод состоит в том, что для установившихся колебаний поток акустической энергии вдоль канала имеет постоянное значение $A = \text{const}$. Свойство $A = \text{const}$ справедливо вне зоны горения, т.е. перед сечением 1 и после сечения 2 даже в том случае, когда на концах канала происходит рассеивание акустической энергии. Изменение A возможно внутри зоны горения вследствие протекающих там процессов. Подставляя (11) в первый интеграл в правой части уравнения (2), для одномерного потока получим

$$-\int_\Sigma \delta p\,\delta w d\Sigma = -\int_1^2 A d\Sigma\,. \tag{12}$$

В зависимости от сдвига фаз φ величина A может быть как положительной, так и отрицательной. Если акустическая волна движется вправо вдоль оси x, то $A > 0$, если влево, то $A < 0$. Обозначим поток акустической энергии пересекающей сечение 1 A_1, а сечение 2 – A_2 . Тогда суммарное количество акустической энергии в зоне горения будет $A_\Sigma = A_2 - A_1$. Введем правило знаков. Если $A_\Sigma > 0$, то область генерирует акустическую энергию, и ее поток направлен из области в окружающую среду, если $A_\Sigma < 0$ – область поглощает акустическую энергию и поток акустической энергии направлен внутрь области. Соответственно, если $A_\Sigma = 0$, то зона горения является нейтральной по отношению к акустической энергии. При наличии потока массы газа надо учитывать потери акустической энергии. Пусть эти потери сосредоточены на концах канала *а* и *в*. С учетом правила знаков потери на конце *а* обозначим $-R_а$, а на конце *в* – $+R_в$. Суммарные потери акустической энергии будут $R = R_в - R_а$. Тогда из энергетических соображений ясно, что при установившихся колебаниях $A_\Sigma = R$. Если $A_\Sigma > R$, то колебания в системе возбуждаются, а при $A_\Sigma < R$ – колебания гасятся. Очевидно, что условие $A_\Sigma = R$ соответствует границе устойчивости.

Здесь надо заметить, что в установках стационарного горения ставится задача, в результате решения которой определяются геометрические размеры зоны горения, обеспечивающие выполнение условия $A_\Sigma < R$. Для надежной работы камер пульсирующего горения необходимо условие $A_\Sigma = R$, а точнее $A_\Sigma - R \le |\varepsilon|$, где ε – величина, заданная заранее. Именно из последнего условия формулируется задача устойчивости работы пульсирующего горения. При этом возникает задача вычисления величин $R_а$ и $R_в$. Эту задачу можно решить, если известны конструктивные размеры трубы и методы расчета диссипативных эффектов на ее концах. Подставим (3), (7) и (12) в (2) и получим выражение, описывающее устойчивость нестационарного движения, вызванное акустическими возмущениями

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int\limits_V \left[\delta u + \delta \left(\frac{\rho w^2}{2} \right) \right] dV = -\int\limits_1^2 A d\Sigma + \int\limits_V \frac{\beta T}{c_p} \delta \left(\frac{ds}{d\tau} \right)_i dV . \qquad (13)$$

Уравнение (13) представляет собой конкретный вид функции Ляпунова, которая может применяться при исследованиях термогидроакустической устойчивости процесса горения. Не трудно заметить, что при этом используется система отсчета Эйлера. Из анализа уравнения (13) можно сделать следующие выводы.

1. Для определения знака функции Ляпунова по уравнению (13) необходимо решать линеаризованную систему дифференциальных уравнений в частных производных.

2. Для учета диссипативных эффектов при анализе процесса горения на устойчивость необходимо знать граничные условия, которые определяются конкретной конструкцией.

3. Для определения «энтропийных» волн необходимо математическое описание кинетики химических реакций при горении и учитывать наличие потока энтропи, который так же зависит от конструктивных параметров зоны горения.

Перечисленные условия подчеркивают сложность решения задачи термогидроакустической устойчивости процесса горения. В самом общем виде уравнение (13) имеет большое значение при проведении теоретического анализа процесса горения на устойчивость. Для решения задач термогидроакустической устойчивости в конкретных теплоэнергетических установках предлагается использовать метод Лагранжа. Обоснование применения метода Лагранжа к исследованиям на устойчивость неравновесных консервативных потоков приведено в работе [4]. Практическое использование метода Лагранжа приводится в работе [5] при расчете регулярных аэротермоакустических автоколебаний в дозвуковых газотурбомашинах.

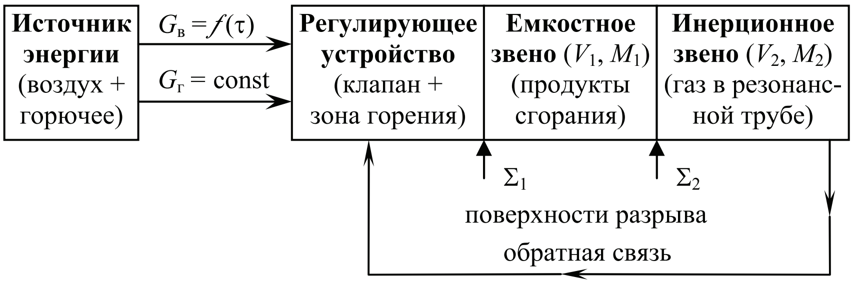

Рис. 1 Составные элементы автоколебательной системы АПГ

В настоящей работе предлагается использовать метод Лагранжа для исследования термогидроакустических колебаний в аппаратах пульсирующего горения (**АПГ**) с аэродинамическим клапаном, физическая модель рабочего процесса которого предложена в работе [1]. Согласно этой модели рабочее тело в АПГ представляет собой автоколебательную систему с обратной связью. Схема приведена на рис. 1

Введем основные допущения, соответствующие этой схеме.

1. Исследуется на устойчивость возмущенное движение потока идеального газа, образующего колебательную систему, состоящую из емкостного звена с объемом V_1 в камере сгорания и инерционного звена с объемом V_2 в резонансной трубе. Рассматриваемые объемы заполнены сплошной средой, которая имеет соответствующие массы M_1 и M_2.

2. Движение объемов установившееся и неразрывное в гидродинамическом понимании. Рассматривается одномерное движение сосредоточенных масс вдоль оси x со скоростями w_1 и w_2, соответственно. В акустических терминах такое движение называют фоном. Указанные на рис. 1 поверхности разрывов Σ_1 и Σ_2 имеют чисто математический смысл, который вводится для того, чтобы применить метод разрывных решений [6]. Под разрывом понимается мгновенное изменение состава и свойств потока в указанных сечениях проточного канала. Такой прием часто называют математической идеализацией.

3. В результате периодических возмущений в зоне горения в потоке газа в резонансной трубе возникает стоячая акустическая волна. При этом длина волны больше длины резонансной трубы, а точнее $l_{тр} = 1/4\ \lambda$. Следовательно, и длина емкостного звена намного меньше длины акустической волны.

4. Акустические возмущения в резонансной трубе накладываются на фон и вызывают смещение поверхности разрыва Σ_2 со скоростью $D = dx_2/d\tau$, что приводит к деформации объема V_1, который заполнен реагирующими продуктами сгорания.

5. В результате деформации объема V_1 в нем изменяется давление на величину δp. Это, в свою очередь, приводит к изменению расхода воздуха $G_в^д$, поступающего в зону горения через аэродинамический клапан. Но изменение расхода воздуха приводит к отклонениям коэффициента избытка воздуха, участвующего в процессе горения на $\delta\alpha$. Следовательно, $\delta\alpha(\tau) = G_в^д(\tau) / G_в^0$. В результате происходит изменение количества тепловой энергии, поступающей с потоком в объем V_1 через неподвижную поверхность разрыва Σ_1. Таким способом осуществляется обратная связь, а система становится автоколебательной.

Энергетическое взаимодействие элементов автоколебательной системы можно показать на основе закона превращения энергии, записав его для возмущений в виде последовательности взаимодействия процессов по схеме на рис. 2.

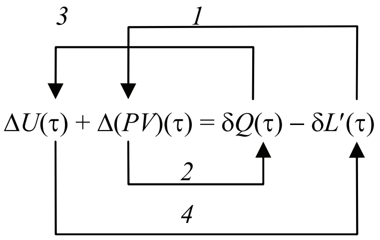

Рис. 2 Схема обратной связи автоколебательной системы

В методе Лагранжа наблюдение ведется за фиксированной частицей или за сплошной средой в целом и прослеживается изменение ее параметров. При этом независимыми переменными, помимо времени, должны являться признаки, позволяющие отличать одну среду от другой. Это может быть масса, плотность, температура среды и т.д. Всегда можно найти такую систему отсчета, по отношению к которой пространство является однородным и изотропным, а время – однородным, т.е. $\partial / \partial\tau = d / d\tau$. Такая система называется инерциальной и функция Лагранжа будет иметь следующий вид $L = \mathrm{K}(r, \dot{r}) - \Pi(r)$, где К – кинетическая и П – потенциальная энергии являются функциями обобщенных координат r и обобщенных скоростей $\dot{r}$. При известной функции Лагранжа уравнения возмущенного движения в обобщенных координатах r_i, $\dot{r}_i$ принимают вид

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \dot{r}_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial r_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial r_i} = 0 \, (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (14)$$

Следовательно, возникает задача определения вида функции Лагранжа для конкретной автоколебательной системы.

В рассматриваемом случае кинетической энергией в возмущенном движении обладает масса газа в резонансной трубе (инерционное звено). Потенциальная энергия силового поля сосредоточена в продуктах сгорания (емкостное звено). Согласно принятой схеме взаимодействия на рис. 2, мы имеем два силовых поля: поле механической энергии и поле тепловой энергии. В связи с тем, что по определению тепловая энергия не связана с деформацией объема, то возникает вопрос определения действующих сил теплового поля. Из второго закона термодинамики известно, что параметром тепловой энергии является энтропия S, при этом существует связь между возрастанием энтропии и скоростью процесса. Если $S = S(\alpha)$, то с изменением α во времени связано изменение энтропии [7], тогда $\dot{S} = \dot{\alpha}(\partial S / \partial \alpha)_0$. Следовательно, производная $(\partial S / \partial \alpha)_0$, которая вычисляется в установившемся течении (индекс «0»), рассматривается как «сила», вызывающая изменение α. Эта связь указывает на природу тепловых или «энтропийных» волн. При этом $\alpha = \alpha(\tau)$. Для открытой системы такая трактовка будет означать, что поток энтропии вызывает изменение коэффициента избытка воздуха α, но справедливо и обратное утверждение: вариация $\delta\alpha$ – вызывает изменение потока энтропии. Зона горения представляет собой открытую термодинамическую систему, поэтому необходимо доказательство, что действующие на нее силовые поля консервативны.

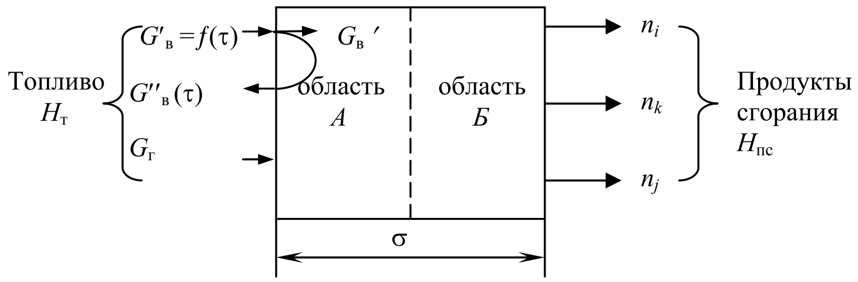

Рис. 3 Расчетная схема процессов в зоне горения

В пульсирующем режиме горения расход воздуха, поступающего в зону горения (область A на рис. 3) изменяется в соответствии с законом акустических возмущений, т.е. $G_в^д = G_в(\tau)$. При этом, в связи с особенностью механизма течения потока через аэродинамический клапан [8], часть воздуха $G'_в$ постоянно участвует в поддержании процесса горения, а вторая его составляющая $G''_в = f(\tau)$ частично участвует в горении, а другая его часть выбрасывается из области A назад и создает реактивную силу. За счет этого обеспечивается установившееся и направленное в сторону $+x$ движение потока в канале АПГ. Такой механизм позволяет считать, что открытая реагирующая зона горения является консервативной системой, т.к. в установившемся потоке при наличии в нем акустических возмущений за полный период $\alpha = \text{const}$. В этом случае установившемуся потоку соответствует равновесное состояние продуктов сгорания. Для таких процессов в работе [9] получено уравнение, которое при равновесном протекании химических реакций имеет вид

$$dG = -SdT + Vdp + \psi_{p,T}\, d\alpha . \tag{15}$$

Согласно Ландау [10] при переходе тела из одного состояния в другое, тело совершает максимальную работу R_{max}, для обратного перехода требуется затрата внешним источником минимальной работы R_{min}. Очевидно, что в потенциальном силовом поле эти работы совпадают, но имеют разные знаки. Для элементарной работы сил внешнего силового поля в работе [10] приводится выражение

$$dR_{min} = (T - T_0)\, dS - (p - p_0)\, dV . \tag{16}$$

В равновесном состоянии (с индексом 0) $T = T_0$ и $p = p_0$ и работа $d\,R_{min} = 0$. Следовательно, в системе отсчета Лагранжа обобщенными координатами являются S и V. Принимаем в уравнении (15) в состоянии равновесия открытой системы $T = \text{const}$, и $p = \text{const}$. Тогда $dG = \psi_{p,T}\, d\alpha$, а производная $(dG / d\alpha)_{p,T} = \psi_{p,T}$ имеет смысл внутренней силы системы. Соответственно, обобщенная сила внешнего поля, действующего на открытую систему, имеет противоположный знак или

$$(\psi_{p,T})_{сист} = -(\psi_{p,T})_{поля} = \left(\frac{dG}{d\alpha}\right)_{p,T} . \tag{17}$$

На основании (17) можно считать, что потенциальной энергией внешнего силового поля для открытой термодинамической системы в системе отсчета Лагранжа является функция состояния $\Pi = G = U + pV - TS(\alpha)$, а обобщенными координатами при равновесном протекании реакций будут $\delta\, V$ и $\delta\, S(\alpha)$.

Прежде чем написать функцию Лагранжа, с помощью которой будем анализировать устойчивость возмущенного движения, необходимо отметить следующее. Рассматриваемая схема автоколебательной системы на рис. 1 предполагает, что система с объемом V_1 взаимодействует с системой объемом V_2. В таком случае говорят, что система 2 движется в заданном внешнем поле, создаваемом системой 1. Для такого движения в работе [11] приводится функция Лагранжа в следующем виде

$$L_2 = \mathrm{K}_2\,(r_2\,,\,\dot{r}_2\,) - \Pi\big(r_2\,,\,r_1\,(\tau)\big) \tag{18}$$

или в наших координатах

$$L_2 = \mathrm{K}_2\,(\delta V_1\,) - \Pi\big(\delta V_1\,,\alpha(\tau)\big)\,, \tag{19}$$

а уравнение возмущенного движения, вызванного акустической волной, будет

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \delta \dot{V}_1}\right) = \frac{\partial L_2}{\partial \delta V_1} \quad (i\,=\,1) \tag{20}$$

или

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathrm{K}_2}{\partial \delta \dot{V}_1}\right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \delta V_1} \quad (i\,=\,1)\,. \tag{21}$$

Уравнение (21) показывает, что мы исследуем устойчивость возмущенного движения относительно возмущений одной независимой обобщенной координаты δV_1. В этом случае для кинетической энергии объема V_2 при $f = \Sigma_1 = \Sigma_2$ получаем

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2}\frac{M_2}{f^2}\left(\frac{d\delta V_1}{d\tau}\right)_0^2 = \frac{1}{2}\frac{M_2}{f^{\;2}}\,(\delta \dot{V}_1\,)^2\,. \tag{22}$$

Потенциальная энергии в возмущенном состоянии для малых отклонений равна

$$\begin{gathered}\Pi \;=\; \Pi_0 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \delta V_1}\right)_{0,\delta\alpha} \delta V_1 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \delta\alpha}\right)_{0,\delta V} \delta\alpha\, + \\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \delta V_1^2}\right)_{0,\delta\,\alpha} \big(\delta V_1\big)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \delta V_1 \partial \delta\alpha}\right)_0 \delta V_1 \delta\alpha + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \delta\alpha^2}\right)_{0,\delta V} \big(\delta\alpha\big)^2\right].\end{gathered} \tag{23}$$

По определению потенциального силового поля первые вариации от потенциальной энергии в равновесном состоянии (с индексом «0») дают нам обобщенные силы, которые равны нулю. Будем считать, что δV_1 является независимой обобщенной координатой, а коэффициент избытка воздуха есть функция от величины деформации объема, т.е. $\delta\alpha = f(\delta V_2)$. Функциональная зависимость α от δV_2 устанавливается на основе закона обратной связи (см. рис. 2). Используя принятое выражение для потенциальной энергии $\Pi = G$, имеем

$$\Pi - \Pi_0 = \frac{1}{2}\left\{\frac{\rho_1^2 a^2}{M_1}(\delta V_1)^2 - 2\left[\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \alpha}\right)_{0,\delta V} RT + \left(\frac{\partial (RT)_1}{\partial \alpha}\right)_{0,\delta V} \rho\right]\delta V_1 \delta\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 H_T(\alpha)}{\partial \alpha^2}\right)(\delta\alpha)^2\right\}. \quad (24)$$

Продифференцируем (24) по δV_1 и получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial(\delta V_1)} = \frac{\rho_1^2 a^2}{M_1}\delta V_1 - \left[\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \alpha}\right)_{0,\delta V} RT + \left(\frac{\partial (RT)_1}{\partial \alpha}\right)_{0,\delta V}\rho\right]\delta\alpha + \left(\frac{\partial^2 H_{\text{т}}(\alpha)}{\partial \alpha^2}\right)\frac{\partial(\delta\alpha)}{\partial(\delta V_1)}\delta\alpha = 0. \quad (25)$$

Для двухкомпонентных топлив

$$\left(\frac{\partial^2 H_{\text{т}}(\alpha)}{\partial \alpha^2}\right) = (\chi_0')^2 h_{\text{в}} G_{\text{в}}^0,$$

а выражение $\frac{\partial(\delta\alpha)}{\partial(\delta V_1)} = \frac{1}{G_{\text{в}}^0}\frac{\partial(G_{\text{в}}^{\text{д}})}{\partial(\delta V_1)} = \frac{f_{\text{кл}}}{G_{\text{в}}^0}\frac{\partial(\rho w)_{\text{в}}}{\partial(\delta V_1)}$ представляет собой обратную связь между возмущениями δV_1 и $\delta\alpha$. После подстановки (22) и (25) в (21) находим

$$\frac{M_2}{f^2}\delta\ddot{V}_1 + \frac{\rho_1^2 a_1^2}{M_1}\delta V_1 - \left[\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \alpha}\right)_{0,\delta V} RT + \left(\frac{\partial (RT)_1}{\partial \alpha}\right)_{0,\delta V}\rho\right]\delta\alpha + (\chi_0')^2 h_{\text{в}} G_{\text{в}}^0 \frac{\partial(\delta\alpha)}{\partial(\delta V_2)}\delta\alpha = 0. \quad (26)$$

Приведем полученное выражение к классическому виду. Для этого поделим его на коэффициент, стоящий перед кинетической энергией и перенесем в правую часть члены, не содержащие обобщенной координаты δV_1. В результате уравнение нестационарного движения в системе отсчета Лагранжа примет вид

$$\delta\ddot{V}_1 + \frac{\rho_1 a_1^2 f}{\rho_2 V_1 l_2}\delta V_1 = \frac{f^2}{\rho_2 V_2}\left\{\left[\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \alpha}\right)_{\delta V} RT + \left(\frac{\partial (RT)_1}{\partial \alpha}\right)_{\delta V}\rho\right] - (\chi_0')^2 h_{\text{в}} G_{\text{в}}^0 \frac{\partial(\delta\alpha)}{\partial(\delta V_2)}\right\}_0 \delta\alpha. \quad (27)$$

Для сокращения записей формул введем обозначения, которые обычно используются в теории колебаний

$$\omega^2 = \frac{\rho_1 a_1^2}{\rho_2 V_1 l_2}, \; h = \frac{f^2}{\rho_2 V_2} \left\{ \begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \alpha} \right)_{\delta V} RT + \left(\frac{\partial (RT)_1}{\partial \alpha} \right)_{\delta V} \rho \right] - \\ &- (\chi_0')^2 h_{\text{в}} G_{\text{в}}^0 \frac{\partial (\delta \alpha)}{\partial (\delta V_1)} \end{aligned} \right\}_0 A_\alpha \; . \tag{28}$$

В (28) произведена замена $\delta\alpha = f(\tau) = A_\alpha \sin(\omega\tau + \varphi)$, где A_α – амплитуда колебаний α. Правая часть (27) отражает вынужденные колебания, генератором которых является зона горения. Следовательно, выражение (27) представляет собой уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы в системе отсчета Лагранжа. Подставим (28) в (27), тогда

$$\delta \ddot{V}_1 + \omega^2 \delta V_1 = h \sin(\omega\tau + \varphi) = h \sin \beta\tau \; . \tag{29}$$

Решение уравнений такого вида известно из теории колебаний материальных точек и представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения

$$\delta \ddot{V}_1 + \omega^2 \delta V_1 = 0 \; , \tag{30}$$

и частного решения уравнения

$$\delta \ddot{V}_1 + \omega^2 \delta V_1 = h \sin(\omega\tau + \varphi) \; . \tag{31}$$

Из решения однородного уравнения мы находим частоту собственных колебаний ω. Частота вынужденных колебаний $\beta = (\omega + \varphi)$ зависит только от внешних условий. Известно, что для надежной работы АПГ в пульсирующем режиме, необходимым условием является возникновение резонанса. Эти условия создаются за счет определенных геометрических размеров проточных каналов АПГ. В этом случае собственная частота свободных колебаний системы совпадает с частотой вынужденных колебаний $\omega = \beta$. Уравнение (27) не учитывает наличие в периодических процессах диссипативных явлений (теплопотери, трение и др.). Поэтому из уравнения (27) невозможно определить сдвиг фаз φ между вынужденными и свободными колебаниями системы. Учет диссипативных эффектов в уравнении (27) в принципе возможен, но в данной работе не рассматривается. Проведенный авторами анализ показывает, что учет трения дает сдвиг фаз между возмущениями $\varphi = \pi/2$. Вычисление производных по α приведено в работе [12].

Выводы

Проведенный сравнительный анализ двух методов расчета термогидроакустической устойчивости позволяет сделать следующие выводы.

1. Метод Ляпунова носит более общий характер, т.к. система уравнений справедлива для решения задач термогидроакустической устойчивости в широком классе теплотехнических устройств, в том числе в трехмерной постановке.

2. Применение метода Ляпунова может вызвать затруднения при решении линеаризованной системы возмущенного движения в частных производных, осо-

бенно в трехмерной постановке. Так как система в частных производных интегрируется численными методами, то для достижения желаемой точности приходится увеличивать число точек в исследуемом диапазоне изменения параметров. Однако, как известно из публикаций, увеличение числа точек не всегда приводит к повышению точности.

3. В систему уравнений в методе Ляпунова геометрические размеры аппарата не входят, поэтому при интегрировании они должны задаваться в виде граничных условий на основе экспериментальны данных. Влияние «энтропийных» волн учитывают на основе эмпирических зависимостей для конкретного вида топлива и условий его сжигания, или вводят эмпирические коэффициенты в уравнение сохранения энергии в виде коэффициентов полноты сгорания.

4. Метод Лагранжа дает нам дифференциальные уравнения возмущенного движения в субстанциальных производных, для решения которых разработан соответствующий математический аппарат.

5. Возмущенное движение, вызванное термоакустическими волнами, в случае одной независимой обобщенной координаты описывается одним уравнением в полных производных. При этом даже одно уравнение включает в себя процессы, связанные с механизмом горения. Это позволяет одновременно учитывать влияние, как акустических возмущений, так и тепловых («энтропийные» волны).

6. В уравнение возмущенного движения, записанное в системе Лагранжа, входят геометрические размеры теплотехнического аппарата, что позволяет решать задачи оптимизации на этапе его проектирования.

7. Сложность применения метода Лагранжа к решению задач термогидроакустической устойчивости заключается в нахождении потенциальной энергии силового поля, обеспечивающего устойчивый режим колебаний.

Список литературы

1. Быченок В.И. Рабочий процесс аппаратов пульсирующего горения для сушки и термовлажностной обработки материалов / В.И. Быченок // Современные энергосберегающие тепловые технологии (сушка и термовлажностная обработка материалов): Тр. междунар. науч.-практ. конф. – Москва: МГАУ, 2002. – Т. 4. – С. 184 – 187.

2. Артамонов К.И. Термогидроакустическая устойчивость / К.И. Артамонов. – М.: Машиностроение, 1982. – 260 с.

3. Раушенбах Б.В. Вибрационное горение / Б.В. Раушенбах. – М.: Физматгиз, 1961. – 500 с.

4. Extended Conservation Laws from Hamilton`s Principle Nonequilibrium Dissipative Fluids / Stanislaw Sieniutycz // Periodica Polytechnica. Ser. Phys. and Nucl. Sci. – 1994. – Vol. 2. No. 1–2. – Pp. 61 – 83.

5. Козырев В.Т. Регулярные автоколебания аэротермоакустической системы дозвуковых газотурбомашин (АКАТАС ГТМ) / В.Т. Козырев // Известия вузов. Машиностроение. – 1991. – № 4–6. – С. 62 – 70.

6. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука,1976. – Т. 1. – 535 с.

7. Беккер Р. Теория теплоты / Беккер Р. – М.: Энергия, 1974. – 504 с.

8. Быченок В.И. Расчет геометрических размеров аэродинамического клапана аппарата пульсирующего горения (АПГ) / В.И. Быченок, В.А. Русин // Труды ТГТУ. – Тамбов, 2004. – Вып.15. – С. 97 – 102.

9. Быченок В.И. Применение методов термодинамики для анализа динамических процессов в камерах пульсирующего горения / В.И. Быченок // Вестник ТГТУ. – 1998. – Т 4. № 4. – С. 495 – 503.

10. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т.V. Статистическая физика: / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1976. Ч. 1. – 584 с.

11. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т. I. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 208 с.

12. Быченок В.И. Частные производные термодинамических функций продуктов сгорания по химическому составу топлива и использование их для экстраполяции / В.И. Быченок, Р.А. Мухамедзянов // Труды КАИ. – Казань, 1973. – Вып. 153. – С. 54 – 59.

Thermal Hydroacoustic Resistance of Autooscillation Processes in Pulsating Combustion Apparatuses

V.I. Bychenock[1], N.V. Mozgovoy[2]

Department «Hydraulics and Heat Engineering», TSTU (1);
Department «Heat Engineering and Industrial Heat Power Engineering,
Vorinezh State Technical University (2)

Key words and phrases: thermal-hydroacoustic resistance; Lyapunov's method; Lagrangian method; pulsating combustion apparatuses.

Abstract: The problem of calculating thermal-hydroacoustic resistance of autooscilating perturbed motion of reacting gas in combustion chambers of heat engineering plants is considered. This motion is the result of influence of acoustic and heat perturbation on working body. In order to determine the borders of resistance the possibility of finding Lyapunov's function and Lagrangian function is analyzed. Comparative analysis of their application to the processes in power engineering plants is carried out. It is shown that Lagrangian method can be successfully used for determining borders of thermal-hydroacoustic resistance in pulsating combustion apparatuses with aerodynamic valve. The equation for calculating resonance frequency is obtained on the basis of this method. The equation enables to solve the problem of optimization of geometric sizes as well.

Thermohydroakustische Stabilität der Autoschwankunsprozesse in den Apparaten des pulsierenden Brennens

Zusammenfassung: Es wird das Problem der Rechnung der thermohydroakustischen Stabilität der autoschwingenden empörten Bewegung des reagierenden Gases in den Kammern der Verbrennung der wärmeenergetischen Anlagen betrachtet. Diese Bewegung entsteht als Ergebnis der Einwirkung auf den Arbeitskörper der akustischen und thermischen Empörungen. Für die Bestimmung der Stabilitätsgrenzen wird die Möglichkeit des Auffindens der Ljapunow-Funktion und der Lagrange-Funktion für solche Systeme analysiert. Es wird die Vergleichanalyse ihrer Anwendung zu den Prozessen in den energetischen Anlagen durchgeführt. Es ist aufgezeigt, daß die Lagrange-Methode in den Apparaten des pulsierenden Brennens mit dem aerodynamischen Ventil für die Bestimmung der Grenzen der thermohydroakustischen Stabilität mit Erfolg benutzt werden kann. Auf Grund dieser Methode ist die Gleichung für die Rechnung der Resonanzfrequenz erhalten.

Stabilité thermohydroacoustique des processus d'auto-oscillation dans les appareils de la combustion pulsatoire

Résumé: Est envisagé le problème du calcul de la stabilité thermohydroacoustique du mouvement perturbé d'auto-oscillation du gaz réagissant dans les chambres de combustion des installations thermoénergétiques qui surgit au cours de l'action sur un corps des perturbations acoustiques et thermiques. Pour la définission des limites de la stabilité est analysée la possibilité de la recherche pour ces systèmes des fonctions de Liapounov et de Lagrange. Est réalisée l'analyse comparative de leur application pour les processus dans les installations énergétiques. Est montré que dans les appareils de la combustion pulsatoire avec une soupape pour la définission des limites de la stabilité thermohydroacoustique on pourrait utiliser la méthode de Lagrange. A la base de cette méthode est reçue une équation pour le calcul de la fréquence de résonance. L'équation permet aussi de résoudre le problème de l'optimisation des dimensions géométriques.
