УДК 681.3

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ЛОГИКА И СВЕРХНЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА. ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ

В.И. Левин

Пензенская государственная технологическая академия, г. Пенза

Представлена членом редколлегии профессором Ю.Л. Муромцевым

Ключевые слова и фразы: интервальная логика; нечеткое множество; сверхнечеткое множество; решение в условиях неопределенности.

Аннотация: Предложено обобщение нечеткого множества Заде на случай, когда само базовое понятие – мера принадлежности элемента множеству – характеризуется некоторой неопределенностью. Для обобщения принята интервальная неопределенность и использована интервальная логика.

---

1 Введение

Хорошо известно, что использование вместо булевых логических операций, операций непрерывной логики (**НЛ**): дизъюнкция $a \vee b = \max(a,b)$, конъюнкция $a \wedge b = \min(a,b)$ и отрицание $\overline{a} = 1 - a$, $a, b \in [0,1]$, совершаемых над мерами принадлежности $M_A(x), M_B(x)$ элемента x различным множествам A, B, где $0 \le M(\bullet) \le 1$, позволяет обобщить стандартные операции объединения, пересечения и дополнения обычных (канторовых) множеств на случай, так называемых, нечетких множеств [1]. При этом дизъюнкции мер принадлежности соответствует объединение, их конъюнкции – пересечение, а отрицанию – дополнение нечетких множеств. Далее, использование тех или иных обобщений операций НЛ позволяет вводить различные обобщения указанных стандартных операций для нечетких множеств. Так, использование логической операции упорядоченного выбора позволило ввести операцию r-композиции нечетких множеств [2], а использование линейной комбинации дизъюнкции и конъюнкции НЛ позволяет аналогичным образом ввести операцию λ-композиции таких множеств [3]. При этом исходной для операции r-композиции нечетких множеств $A, B, ..., D$ является логическая операция выбора r-й по возрастанию меры принадлежности элемента x среди мер $M_A(x), M_B(x), ..., M_D(x)$ его принадлежности различным множествам $A, B, ..., D$. Результат этой операции и принимается за меру принадлежности элемента x к r-композиции множеств $A, B, ..., D$. А исходной для операции λ-композиции нечетких множеств A, B является гибридная логико-алгебраическая операция в виде линейной комбинации дизъюнкции и конъюнкции НЛ

$$a \ \langle\lambda\rangle \ b = (1-\lambda)(a \wedge b) + \lambda(a \vee b), \ \ 0 \le \lambda \le 1. \tag{1.1}$$

Результат этой операции над мерами принадлежности элемента x множествам A и B и принимается за его меру принадлежности λ-композиции этих множеств. Обе введенные операции над нечеткими множествами обобщают операции объединения и пересечения нечетких множеств, занимая промежуточное положение между ними, зависящее от значения параметра r или λ. Описанные операции над нечеткими множествами опираются на точно известные функции принадлежности $M_A(x)$ элементов x, что на практике далеко не всегда осуществимо. Цель настоящей статьи – обобщение основных понятий теории нечетких множеств на случай, когда функции принадлежности известны неточно.

2 Постановка задачи

Все указанные во введении операции над нечеткими множествами основаны на молчаливом предположении, что мера принадлежности $M_A(x)$ любого элемента x любому множеству A точно известна. Это предположение определяет современную теорию обычных нечетких множеств. Однако оно противоречит другому предположению данной теории, по которому понятие нечеткого множества позволяет моделировать неопределенность человеческого мышления, поскольку следствием данной неопределенности должна была бы быть также неточность оценки меры принадлежности $M_A(x)$ элемента x человеком.

Сделанные соображения побуждают попытаться перейти от понятия нечеткого множества к новому понятию сверхнечеткого множества, в котором учтена указанная неточность.

Неточность оценки меры принадлежности элемента множеству, свойственная человеку, может учитываться путем введения в эту оценку различных форм неопределенности: статистической, нечеткой или интервальной. По ряду причин целесообразно выбрать интервальную форму неопределенности. Действительно, эта форма – наиболее простая, содержащая минимум информации об оцениваемой величине. Далее, эта форма весьма удобна для экспертов, оценивающих те или иные величины. Наконец, существует развитый математический аппарат – так называемая интервальная математика, позволяющая выполнять вычисления с интервальными числами.

Наша задача с математической точки зрения состоит в следующем. Пусть для некоторой системы подмножеств $A, B, \ldots$ универсального множества заданы приближенно (с точностью до интервалов возможных значений) функции принадлежности $M_A(x), M_B(x) \ldots$ элементов x. Требуется построить, с использованием заданных функций принадлежности, теоретико-множественные операции объединение, пересечение и дополнение множеств $A, B, \ldots$, учитывающие неточность задания указанных функций.

3 Метод решения

Будем считать по определению, что любой элемент $x \in U$, где U – универсальное множество, характеризуется мерой принадлежности $\tilde{M}_A(x)$ к сверхнечеткому множеству A, задаваемой в виде замкнутого интервала $\tilde{M}_A(x) = [M_{1A}(x), M_{2A}(x)]$, $M_{1A}(x), M_{2A}(x) \in [0,1]$, где $M_{1A}(x)$ – нижняя, а $M_{2A}(x)$ – верхняя граница интервальной меры принадлежности элемента x множеству A. Таким образом, основное отличие сверхнечеткого множества от нечеткого заключается в том, что в первом уже базовое понятие – мера принадлежности элемента множеству – характеризуется некоторой неопределенностью. В нашем случае эта неопределенность интервальная, но в принципе возможно использовать и другие ее виды. Итак, сверхнечеткое множество A характеризуется интервальной функцией принадлежности $U \to \tilde{M}_A(x) \subseteq [0,1]$, которая ставит в соответствие каждому элементу $x \in U$ интервальное число $\tilde{M}_A(x)$ из интервала $[0,1]$, характеризующее приблизительно (с точностью до интервала) меру принадлежности элемента x множеству A.

Введение сверхнечетких множеств делает более адекватным моделирование мышления человека, в частности, моделирование процесса логического вывода и принятия решений в условиях неопределенности. Построение соответствующей теории возможно на базе интервальной НЛ [4] и проводится следующим образом.

Операции и отношения над сверхнечеткими множествами можно ввести аналогично соответствующим операциям и отношениям над нечеткими множествами [1]. Именно, отношение включения множества A в множество B определяется в виде

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow [\tilde{M}_A(x) \leq \tilde{M}_B(x),\ \ \forall x \in U]. \tag{3.1}$$

Т.е. A включено в B, если для любого элемента x его интервальная мера принадлежности к A не превосходит его интервальной меры принадлежности к B. Далее, равенство множеств A и B определяется в виде

$$(A = B) \Leftrightarrow [\tilde{M}_A(x) = \tilde{M}_B(x),\ \ \forall x \in U]. \tag{3.2}$$

Т.е. $A = B$, если для любого элемента x его интервальные меры принадлежности обоим множествам равны. В противном случае $A \neq B$. Дополнение $\overline{A}$ множества A вводится следующим образом

$$(B = \overline{A}) \Leftrightarrow [\tilde{M}_B(x) = \overline{\tilde{M}}_A(x),\ \ \forall x \in U]. \tag{3.3}$$

Т.е. $B = \overline{A}$, если для любого элемента x его интервальная мера принадлежности множеству B равна отрицанию интервальной НЛ [4] его интервальной меры принадлежности множеству A. Объединение множеств A и B определяется

$$(C = A \cup B) \Leftrightarrow [\tilde{M}_C(x) = \tilde{M}_A(x) \vee \tilde{M}_B(x),\ \ \forall x \in U]. \tag{3.4}$$

Таким образом, интервальная мера принадлежности любого элемента x объединению множеств A и B определяется как дизъюнкция интервальной НЛ [4] его интервальных мер принадлежности этим множествам. Наконец, пересечение множеств A и B определяется в виде

$$(C = A \cap B) \Leftrightarrow [\tilde{M}_C(x) = \tilde{M}_A(x) \wedge \tilde{M}_B(x),\ \ \forall x \in U]. \tag{3.5}$$

Т.е. интервальная мера принадлежности любого элемента x пересечению множеств A и B определяется как конъюнкция интервальной НЛ [4] его интервальных мер принадлежности этим множествам.

Фигурирующие в формулах (3.1) – (3.5) отношения между интервальными числами и операции над ними рассмотрены в работе [4]. Согласно ей, эти отношения и операции выполняются по следующим правилам:

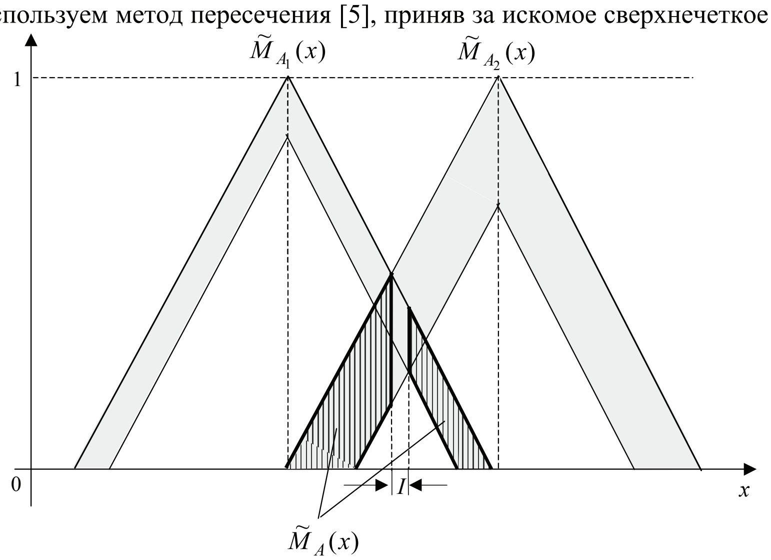
$$\begin{gathered}
([a_1,a_2] \leq [b_1,b_2]) \Leftrightarrow (a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2); \\
([a_1,a_2] = [b_1,b_2]) \Leftrightarrow (a_1 = b_1, a_2 = b_2); \\
([a_1,a_2] = \overline{[b_1,b_2]}) \Leftrightarrow (a_1 = \overline{b}_2 = 1 - b_2,\ a_2 = \overline{b}_1 = 1 - b_1); \\
([c_1,c_2] = [a_1,a_2] \vee [b_1,b_2]) \Leftrightarrow (c_1 = a_1 \vee b_1, c_2 = a_2 \vee b_2); \\
([c_1,c_2] = [a_1,a_2] \wedge [b_1,b_2]) \Leftrightarrow (c_1 = a_1 \wedge b_1, c_2 = a_2 \wedge b_2).
\end{gathered} \tag{3.6}$$

4 Применение к принятию решений в условиях неопределенности

Моделирование принятия решений в условиях неопределенности с помощью сверхнечетких множеств идейно аналогично моделированию принятия решений с использованием обычных нечетких множеств. При этом можно использовать те же самые постановки задач принятия решений и те же самые критерии того, что считать решением [1]. Например, в случае коллективных решений в качестве правила объединения индивидуальных оценок отдельных экспертов можно принять пересечение сверхнечетких множеств, служащих индивидуальными оценками [1]. Однако, здесь возникают существенные математические трудности, связанные со сравнением интервальных чисел и последующим выбором максимального и минимального чисел. Действительно, как видно из первой формулы (3.6), сравнимы не любые интервалы, а лишь сдвинутые обоими концами относительно друг друга. Поэтому решения в условиях неопределенности на основе сверхнечетких множеств не всегда существуют. Отсутствие решений в некоторых случаях следует рассматривать как плату за неопределенность (недостаточность информации об объекте). Бороться с неопределенностью в таких случаях можно двояко. Во-первых, можно пытаться выбирать высококомпетентных экспертов, способных давать интервальные оценки меры принадлежности элементов множествам в виде весьма узких интервалов, близких к точным оценкам. При этом используется тот факт, что точно заданные числа всегда сравнимы. Во-вторых, можно пытаться подбирать коллективы равнокомпетентных экспертов, дающих интервальные оценки меры принадлежности элементов множествам в виде интервалов равной ширины. При этом используется тот факт, что, согласно первой формуле (3.6), интервальные числа с равной шириной всегда сравнимы.

П р и м е р. Два эксперта $i = 1, 2$ дают индивидуальные оценки одной и той же ситуации в виде двух сверхнечетких множеств A_1, A_2, интервальные функции принадлежности которых $\tilde{M}_{A_1}(x), \tilde{M}_{A_2}(x)$ показаны на рисунке. Требуется объединить индивидуальные оценки A_1, A_2 в коллективную в виде соответствующего сверхнечеткого множества A.

Используем метод пересечения [5], приняв за искомое сверхнечеткое множе-



ство A пересечение сверхнечетких множеств A_1, A_2. Операцию пересечения множеств выполняем по формуле (3.5). Требуемое для этого вычисление конъюнкции $\wedge$ интервальной НЛ интервальных оценок двух экспертов $\tilde{M}_{A_1}(x), \tilde{M}_{A_2}(x)$ выполняем по последней формуле (3.6). Результирующая коллективная оценка A показана на рисунке: ее интервальная функция принадлежности дана штриховкой. Хорошо видно, что в интервале I оценка A не существует из-за неопределенности, вызванной неточными (интервальными) оценками функций принадлежности обоими экспертами.

5 Заключение

В статье показано, что переход от точной меры принадлежности элемента множеству к приближенной, в виде некоторого интервала, позволяет обобщить понятие нечеткого множества. Результатом обобщения оказывается понятие сверхнечеткого множества, в котором неопределенность содержится не только в неточном задании факта принадлежности элемента множеству (когда элемент может принадлежать множеству, скажем, на 70 %), но и в неточной оценке меры принадлежности элемента множеству экспертом (элемент может принадлежать множеству на 70 ± 10 %). Такое более полное введение неопределенности в понятие множества помогает строить для приложений более реалистические теоретико-множественные модели.

Список литературы

1. Заде Л. Понятие лингвистической переменной / Л. Заде. – М.: Мир, 1978.
2. Левин В.И. Новое обобщение операций над нечеткими множествами / В.И. Левин // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 1.
3. Левин В.И. Дизконъюнкция – новая логическая операция / В.И. Левин // Сб. «Международная научно-техническая конференция «Математические методы в экономике». Сборник материалов». Пенза: Изд-во Приволжского Дома знаний. 2002.
4. Левин В.И. Интервальная непрерывная логика и ее применение в задачах управления / В.И. Левин // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 1.
5. Bellman R.E., Zadeh L.A. Decision Making in Fuzzy Environment // Management Science. 1970. V. 17. No. 4.

Interval Logic and Super-Fuzzy Sets. Theory and Application

V.I. Levin

Penza State Technological Academy

Key words and phrases: interval logic; fuzzy set; super-fuzzy set; solutions in terms of uncertainty.

Abstract: Generalization of Zade fuzzy set is proposed in case the basic notion – the extent of element's belonging to the set – is characterized by some ambiguity. Interval ambiguity and interval logic are used for generalizing.

Zwischenlogik und superundeutliche Mengen. Theorie und Anwendung

Zusammenfassung: Es wird die Verallgemeinerung der undeutlichen Zade-Menge im Fall, wenn Stützpunktbegriff – die Massnahme der Zugehörigkeit des Elementes zur Menge – von einiger Unbestimmtheit charakterisiert wird, vorgeschlagen. Für die Verallgemeinerung ist die Zwischenunbestimmtheit übernommen und es ist die Zwischenlogik verwendet.

Logique d'intervalles et ensembles superincertains. Theorie et application

Résumé: Est proposée la généralisation de l'ensemble incertain de Zade pour le cas lorsque la notion de base – mesure de l'appartenance de l'élément à l'ensemble – est caractérisée par une indétermination. Pour la généralisation est admise l'indétermination des intervalles et est utilisée la logique des intervalles.