

УДК 534: 62-13

**ВИБРОАКТИВНОСТЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ
НЕУРАВНОВЕШЕННЫХ ВАЛОВ, ВРАЩАЮЩИХСЯ
В УПРУГО-МАССОВЫХ ОПОРАХ**

В.И. Галаев

Кафедра «Теоретическая механика», ТГТУ

*Представлена профессором Н.Я. Молотковым
и членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым*

Ключевые слова и фразы: вынужденные колебания; вибронегруженность; обрабатывающий вал; прижимной вал; роторная машина; статическая и моментная неуравновешенности.

Аннотация: Проведены аналитические исследования вынужденных колебаний системы двух валов с упругим слоем между ними, вызываемых неуравновешенностью одного вала. Получены распределения уровней вибронегруженности валов по их длине в случаях статической и моментной неуравновешенностей.

Механическая обработка материалов в зазоре между валами, вращающимися с различными угловыми скоростями, является назначением многих роторных машин. Обработка материала происходит на поверхности вала с меньшей угловой скоростью (прижимной вал), с помощью которого осуществляется также предварительное сжатие материала и его подача в зону обработки. Вал, имеющий большую угловую скорость (обрабатывающий вал) предназначен для придания материалу соответствующих физико-механических и геометрических характеристик. В практике обработки, например кожевенных материалов, машинами такого типа являются строгальные машины для получения требуемой толщины и гладкой поверхности кожи [1].

Процесс обработки материалов на роторных машинах сопровождается колебаниями их рабочих органов, основными при этом являются колебания с частотой вращения обрабатываемого вала, что указывает на его динамическую неуравновешенность. Соответствие обрабатываемого материала установленным требованиям во многом определяется качеством динамического функционирования обрабатывающей системы роторных машин, работа которой является показателем рациональности конструкции машины в целом [2].

Механическая модель обрабатывающей системы представлена в виде двух валов, расположенных в горизонтальной плоскости, с упругой связью между ними, которой является полоса материала в зазоре между валами, рассматриваемая как линейные силы упругости, равномерно распределенные по их длине (рис. 1).

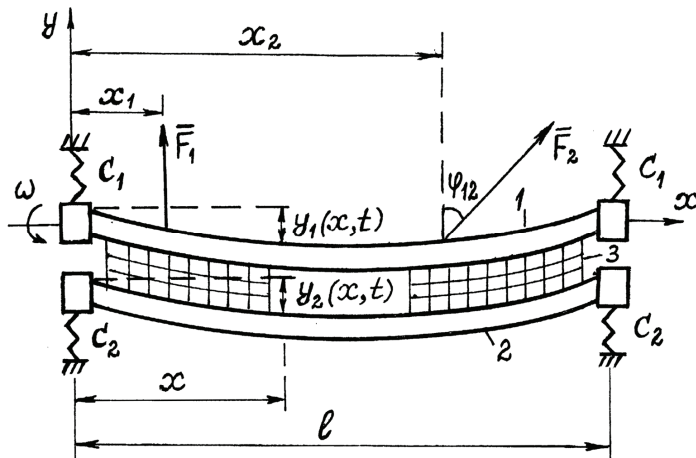


Рис. 1 Расчетная динамическая модель системы упругосвязанных валов:
1 – обрабатывающий вал; 2 – прижимной вал; 3 – упругая связь

Главный вектор и момент дисбалансов обрабатывающего вала заменяется эквивалентной системой, состоящей из двух дисбалансов. Угловая скорость этого вала намного больше угловой скорости прижимного вала, что позволяет не учитывать неуравновешенность последнего. Колебания обрабатывающей системы рассматриваются в горизонтальной плоскости, так как они определяют распределение отклонений зазора между валами от технологического зазора, а следовательно, и качество обработки материала.

Введем следующие обозначения: $E_1 J_1$, ρ_1 , $E_2 J_2$, ρ_2 – изгибные жесткости и массы единицы длины обрабатывающего и прижимного валов соответственно; ℓ – длина валов; ω , D_1 , D_2 , φ_{12} – угловая скорость, дисбалансы и сдвиг фаз между дисбалансами обрабатывающего вала соответственно; x_1 , x_2 – координаты точек расположения дисбалансов D_1 и D_2 ; C_n – коэффициент жесткости упругого слоя между валами; C_1 , C_2 , M_1 , M_2 – жесткости и массы опор валов соответственно; $y_1(x, t)$, $y_2(x, t)$ – функции распределения динамических прогибов обрабатывающего и прижимного валов по их длине.

Система дифференциальных уравнений относительно функций $y_1(x, t)$, $y_2(x, t)$ имеет вид

$$\begin{cases} E_1 J_1 \frac{\partial^4 y_1(x, t)}{\partial x^4} + \rho_1 \frac{\partial^2 y_1(x, t)}{\partial t^2} + C_n [y_1(x, t) - y_2(x, t)] = f(x, t); \\ E_2 J_2 \frac{\partial^4 y_2(x, t)}{\partial x^4} + \rho_2 \frac{\partial^2 y_2(x, t)}{\partial t^2} + C_n [y_2(x, t) - y_1(x, t)] = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $f(x, t)$ – внешняя нагрузка, действующая на обрабатывающий вал, представляемая в виде двух сосредоточенных сил $F_1 = D_1 \omega^2 \sin(\omega t)$ и $F_2 = D_2 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_{12})$ (см. рис. 1).

Предполагаем, что силы F_1 и F_2 равномерно распределены в интервалах от x_1 до $x_1 + \sigma_1$ и от x_2 до $x_2 + \sigma_2$ с интенсивностями $f_1(x, t)$ и $f_2(x, t)$ на единицу длины вала, что позволит при решении задачи не записывать условия сопряжения решений системы уравнений (1). При этом $f_1(x, t) \sigma_1 \rightarrow F_1$, $\sigma_1 \rightarrow 0$; $f_2(x, t) \sigma_2 \rightarrow F_2$; $\sigma_2 \rightarrow 0$; поэтому $f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t)$:

$$f_1(x, t) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \quad x \geq x_1 + \sigma_1 \\ q_1 \sin \omega t, & x_1 \leq x < x_1 + \sigma_1; \end{cases}$$

$$f_2(x, t) = \begin{cases} 0, & x < x_2, \quad x \geq x_2 + \sigma_2 \\ q_2 \sin \omega t, & x_2 \leq x < x_2 + \sigma_2; \end{cases}$$

где $q_i \sigma_i \rightarrow D_i \omega^2$, $\sigma_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2$.

Решение системы (1), соответствующее вынужденным колебаниям валов, ищем в виде

$$\begin{cases} y_1(x, t) = A_1^1(x) \sin \omega t + A_1^2(x) \sin(\omega t + \varphi_{12}); \\ y_2(x, t) = A_2^1(x) \sin \omega t + A_2^2(x) \sin(\omega t + \varphi_{12}), \end{cases} \quad (2)$$

где $A_1^1(x)$, $A_1^2(x)$, $A_2^1(x)$, $A_2^2(x)$ – формы вынужденных колебаний валов.

Переходя к безразмерной координате $\xi = \frac{x}{l}$, для функций A_j^i ($i = 1, 2$, $j = 1, 2$) получим следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^4 A_1^i(\xi)}{d\xi^4} - d_1 A_1^i(\xi) - b_1 A_2^i(\xi) = f_i(\xi) \frac{l^4}{E_1 J_1}; \\ \frac{d^4 A_2^i(\xi)}{d\xi^4} - d_2 A_2^i(\xi) - b_2 A_1^i(\xi) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $b_i = C_n l^4 / E_i J_i$, $d_i = (\rho_i \omega^2 - C_n) l^4 / E_i J_i$, $\xi_i = x_i / l$, $f_i(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < \xi_i, \quad \xi \geq \xi_i + \sigma_i / l \\ q_i, & \xi_i \leq \xi < \xi_i + \sigma_i / l, \end{cases}$
 $i = 1, 2$.

Граничные условия:

$$\frac{d^2 A_j^i(0)}{d\xi^2} = \frac{d^2 A_j^i(1)}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3 A_j^i(0)}{d\xi^3} = -\beta_i A_j^i(0), \quad \frac{d^3 A_j^i(1)}{d\xi^3} = \beta_i A_j^i(1), \quad (4)$$

где $\beta_i = \frac{l^3}{E_i J_i} (C_i - M_i \omega^2)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

Из системы уравнений (3) относительно функций $A_2^i(\xi)$ получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^8 A_2^i(\xi)}{d\xi^8} - (d_1 + d_2) \frac{d^4 A_2^i(\xi)}{d\xi^4} + (d_1 d_2 - b_1 b_2) A_2^i(\xi) = \frac{b_2 l^4}{E_1 J_1} f_i(\xi), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Граничные условия (4) с учетом второго уравнения системы (3) можно записать в виде:

$$\frac{d^2 A_2^i(0)}{d\xi^2} = \frac{d^2 A_2^i(1)}{d\xi^2} = \frac{d^6 A_2^i(0)}{d\xi^6} = \frac{d^6 A_2^i(1)}{d\xi^6} = 0,$$

$$\frac{d^3 A_2^i(0)}{d\xi^3} = -\beta_2 A_2^i(0), \quad \frac{d^7 A_2^i(0)}{d\xi^7} = -\beta_2 d_2 A_2^i(0) - \beta_1 b_2 A_1^i(0), \quad (6)$$

$$\frac{d^3 A_2^i(1)}{d\xi^3} = \beta_2 A_2^i(1), \quad \frac{d^7 A_2^i(1)}{d\xi^7} = \beta_2 d_2 A_2^i(1) + \beta_1 b_2 A_1^i(1), \quad i = 1, 2.$$

Общее решение уравнения (5) $A_2^i(\xi) = A_3(\xi) + A_4^i(\xi)$, где $A_3(\xi)$, $A_4^i(\xi)$ соответственно общее решение однородного и частное решение данного уравнения [3]:

$$A_3(\xi) = C_1 \operatorname{sh} \lambda_1 \xi + C_2 \operatorname{ch} \lambda_1 \xi + C_3 \sin \lambda_1 \xi + C_4 \cos \lambda_1 \xi + C_5 \operatorname{sh} \lambda_5 \xi + C_6 \operatorname{ch} \lambda_5 \xi + C_7 \sin \lambda_5 \xi + C_8 \cos \lambda_5 \xi, \quad (7)$$

где $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_5 = \alpha_5 + i\beta_5$ – корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (5), $C_1 - C_8$ – постоянные, определяемые граничными условиями (6), $\alpha_1, \alpha_5, \beta_5$ – неотрицательные постоянные, определяемые величинами d_1, d_2, b_1, b_2 :

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{\frac{z_1}{2}}, \quad z_1 = d_1 + d_2 + \sqrt{(d_2 - d_1)^2 + 4b_1 b_2} > 0,$$

$$\alpha_5 = \sqrt[4]{\frac{z_2}{2}}, \quad \beta_5 = 0 \quad \text{при} \quad z_2 = d_1 + d_2 - \sqrt{(d_2 - d_1)^2 + 4b_1 b_2} \geq 0,$$

$$\alpha_5 = \beta_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{-z_2/2} \quad \text{при} \quad z_2 < 0.$$

В зависимости от знака величины z_2 решение $A_3(\xi)$ может быть как действительным, так и комплексным.

Частное решение $A_4^i(\xi)$ определим методом операционного исчисления [4]:

$$A_4^i(\xi) = \sum_{k=1}^8 \frac{1}{B^1(\lambda k)} \int_0^\xi \frac{b_2 l^4}{E_1 J_1} f_i(\tau) e^{\lambda k(\xi-\tau)} d\tau,$$

где $B(p) = p^8 - (d_1 + d_2)p^4 + (d_1 d_2 - b_1 b_2)$ – функция комплексного переменного p , $B^1(\lambda k) = \frac{dB(p)}{dp} \Big|_p = \lambda k$, λk – корни характеристического уравнения для дифференциального уравнения (5), $\lambda_2 = -\alpha_1$, $\lambda_3 = i\alpha_1$, $\lambda_4 = -i\alpha_1$; $\lambda_6 = -\lambda_5$, $\lambda_7 = i\lambda_5$, $\lambda_8 = -i\lambda_5$.

Так как при $0 \leq \xi < \xi_i$ $f_i(\xi) = 0$, то в этом интервале $A_4^i(\xi) = 0$. При $\xi_i < \xi < 1$ получаем

$$A_4^i(\xi) = \sum_{k=1}^8 \frac{1}{B^1(\lambda k)} \int_{\xi_i}^{\xi_i + \sigma_i / \ell} \frac{b_2 \ell^4}{E_1 J_1} q_i e^{\lambda k(\xi-\tau)} d\tau.$$

Использование теоремы о среднем и условия $q_i \sigma_i \rightarrow D_i \omega^2$ при $\sigma_i \rightarrow 0$ позволяет записать решение $A_4^i(\xi)$ в виде:

$$A_4^i(\xi) = \frac{D_1 \omega^2 \ell^3 b_2}{2 E_1 J_1 \theta} \left[\frac{\operatorname{sh} \lambda_1(\xi - \xi_i) - \sin \lambda_1(\xi - \xi_i)}{\lambda_1^3} - \frac{\operatorname{sh} \lambda_5(\xi - \xi_i) - \sin \lambda_5(\xi - \xi_i)}{\lambda_5^3} \right], \quad (8)$$

где $\theta = \sqrt{(d_2 - d_1)^2 + 4b_1 b_2}$.

Таким образом, если величины $z_2 \geq 0$ и $\xi_i \leq \xi < 1$ решения $A_3(\xi)$ и A_4^i имеют вид (7) и (8), при $z_2 < 0$ и $\xi_i \leq \xi < 1$ решения $A_3(\xi)$ и A_4^i могут быть представлены в форме:

$$A_3(\xi) = C_1 \sin \lambda_1 \xi + C_2 \operatorname{ch} \lambda_1 \xi + C_3 \sin \lambda_1 \xi + C_4 \cos \lambda_1 \xi + e^{\alpha_5 \xi} (C_5 \sin \alpha_5 \xi + C_6 \cos \alpha_5 \xi) + e^{-\alpha_5 \xi} (C_7 \sin \alpha_5 \xi + C_8 \cos \alpha_5 \xi), \quad (9)$$

$$A_4^i(\xi) = \frac{D_i \omega^2 e^3 b_2}{2 E_1 J_1 \theta} \left[\frac{\operatorname{sh} \lambda_1 (\xi - \xi_i) - \sin \lambda_1 (\xi - \xi_i)}{\lambda_1^3} + \frac{\cos \alpha_5 (\xi - \xi_i) \operatorname{sh} \alpha_5 (\xi - \xi_i) - \sin \alpha_5 (\xi - \xi_i) \operatorname{ch} \alpha_5 (\xi - \xi_i)}{2 d_5^3} \right]. \quad (10)$$

Функции $A_4^i(\xi)$ определяются из второго уравнения системы (3)

$$A_4^i(\xi) = \frac{1}{b_2} \left[\frac{d^4 A_2^i(\xi)}{d\xi^4} - d_2 A_2^i(\xi) \right], \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Граничные условия $\frac{d^2 A_2^i(0)}{d\xi^2} = \frac{d^6 A_2^i(0)}{d\xi^6} = 0$ дают следующие соотношения

между постоянными C_s ($s = 1, \dots, 8$): $C_2 = C_4, C_6 = C_8$ при $z_2 \geq 0$; $C_2 = C_4, C_5 = C_7$ при $z_2 < 0$.

Использование оставшихся граничных условий (6) позволяет определить остальные постоянные C_s .

По функциям $A_1^1(\xi); A_2^1(\xi); A_1^2(\xi); A_2^2(\xi)$ можно установить распределение динамических прогибов валов в интервалах: $0 < \xi \leq \xi_1, \xi_1 < \xi \leq \xi_2, \xi_2 < \xi < 1$. При этом функции распределения амплитуд вынужденных колебаний обрабатывающего $A_1(\xi)$ и прижимного $A_2(\xi)$ валов имеют вид:

$$A_1(\xi) = \sqrt{[A_1^1(\xi)]^2 + 2 A_1^1(\xi) A_1^2(\xi) \cos \varphi_{12} + [A_1^2(\xi)]^2};$$

$$A_2(\xi) = \sqrt{[A_2^1(\xi)]^2 + 2 A_2^1(\xi) A_2^2(\xi) \cos \varphi_{12} + [A_2^2(\xi)]^2}. \quad (12)$$

Для установления распределения амплитуд вынужденных колебаний валов по их длине была составлена соответствующая программа численного решения исследуемой задачи (1) – (12), позволяющая выявить в зависимости от вида неуравновешенности обрабатывающего вала наиболее вибронгруженные участки валов, проанализировать влияние параметров системы на ее динамическое функционирование.

На рис. 2 представлены графики распределения амплитуд вынужденных колебаний валов для следующих параметров исследуемой системы: $E_1 J_1 = 1,5 \cdot 10^7$ Н·м²; $E_2 J_2 = 0,44 \cdot 10^7$ Н·м²; $\rho_1 = 234$ кг/м; $\rho_2 = 57$ кг/м; $l = 2,1$ м; $\omega = 144$ с⁻¹; $c_1 = 0,9 \cdot 10^7$ н/м; $c_2 = 0,5 \cdot 10^8$ н/м; $c_n = 10^7$ н/м²; $M_1 = M_2 = 0$.

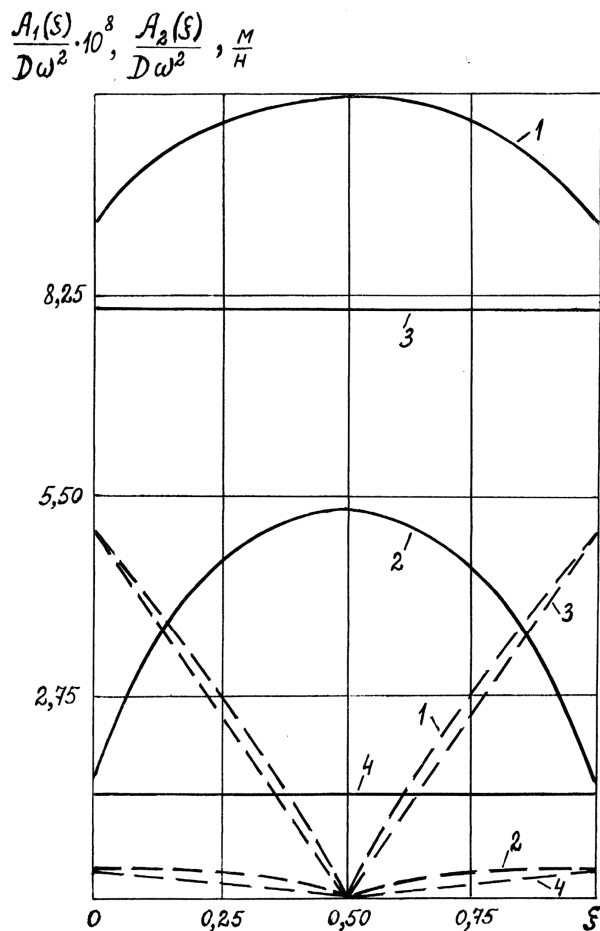


Рис. 2 Распределение амплитуд вынужденных колебаний валов по их длине:
 1, 2 – обрабатывающий и прижимной валы с учетом изгиба соответственно;
 3, 4 – обрабатывающий и прижимной валы как жесткие соответственно;
 ————— статическая неуравновешенность;
 - - - - - моментная неуравновешенность

Безразмерные координаты точек приложения возмущающих сил, действующих на обрабатывающий вал, принимались равными $\xi_1 = 0,25$; $\xi_2 = 0,75$; дисбалансы $D_1 = D_2 = D$; сдвиг фаз дисбалансов $\varphi_{12} = 180^\circ$ и $\varphi_{12} = 0$, то есть рассматривались моментная и статическая неуравновешенности обрабатывающего вала. На этом же рисунке приведены графики распределения амплитуд колебаний валов, определенных в предположении их абсолютной жесткости.

Следует отметить существенное различие в уровнях вибронегруженности валов при различных видах неуравновешенности обрабатывающего вала. Амплитуды колебаний валов, рассчитанные с учетом их изгибной жесткости и в предположении абсолютной жесткости валов значительно отличаются в случае статической неуравновешенности; это различие несущественно при моментной неуравновешенности обрабатывающего вала.

Проектированию промышленной роторной машины должны предшествовать теоретические исследования колебаний ее рабочих органов и решение задачи обеспечения стабильности вибрационных характеристик, изменение которых мо-

жет происходить вследствие действия технологической нагрузки или вызываться переменностью параметров самой машины, определяемых износом или приработкой ее деталей. В зависимости от рассматриваемой задачи роторную машину идеализируют динамическими схемами, которые представляют отдельные части динамической схемы машины в целом, при этом решение даже частных вопросов динамики рабочих органов несомненно способствует совершенствованию конструкций роторных машин.

Список литературы

1. Бурмистров А.Г. Оборудование предприятий по производству кожи и меха / А.Г. Бурмистров, Б.В. Зайцев, А.И. Морозов, В.В. Жуков. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1981. – 415 с.
2. Галаев В.И. Качественный анализ динамического функционирования обрабатывающей системы строгальных машин / В.И. Галаев. – Изв. вузов. Технология легкой промышленности, 1989, № 3. – С. 100 – 104.
3. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1981. – 304 с.
4. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1980. – 350 с.

Vibro-Activity of Interaction System of Unbalanced Shafts Rolling in Elastic-Mass Bearing

V.I. Galaev

Department "Theoretical Mechanics", TSTU

Key words and phrases: forced vibrations; vibro-loading; processing shaft; pressure roller; rotor machine; static and moment unbalance.

Abstract: Analytical research of forced vibrations caused by unbalance of one of the two shafts and elastic layer between them is carried out. The distribution of the levels of shafts vibro-loading on their length in cases of static and moment unbalances is obtained.

Vibroaktivität der Zusammenwirkung des Systems der in den elastischen Massenauflagerungen unausgeglichenen Wellen

Zusammenfassung: Es sind die analytischen Untersuchungen der von der Unausgeglichenheit der einen Welle hervorgerufenen Notschwankungen des Systems von zwei Wellen mit der elastischen Schicht zwischen ihnen durchgeführt. Es sind die Verteilungen der Vibrobelastungsniveaus der Wellen nach ihrer Länge in Fällen der statischen und momenten Unausgeglichenheit erhalten.

Activité de vibration de l'interaction du système des arbres non équilibrés tournant dans les appuis élastiques massiques

Résumé: Sont mentionnées les études des oscillations forcées du système de deux arbres avec une couche élastique entre celles-ci provoquées par le non-équilibre d'une de ces arbres. Sont obtenues les répartitions des niveaux du chargement de vibration des arbres par leur longueur dans les cas des non-équilibres statique et momentanée.
