УДК 517. 928. 4

О ВЕКТОРНОМ УРАВНЕНИИ ЭЙЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.И. Фомин

Кафедра прикладной математики и механики, ТГТУ

Представлена членом редколлегии профессором Г.М. Куликовым

Ключевые слова и фразы: банахово пространство; косинус оператор-функция; малое стабилизирующее возмущение; ограниченное решение; операторный дискриминант; сингулярное дифференциальное уравнение; синус оператор-функция; спектр оператора; точка вырождения.

Аннотация: В банаховом пространстве находится методом малых стабилизирующих возмущений ограниченное в точке вырождения решение уравнения из названия статьи.

В банаховом пространстве E находится методом малых стабилизирующих возмущений ограниченное в точке вырождения $t = 0$ решение сингулярного дифференциального уравнения

$$t^2x''(t) + tAx'(t) + Bx(t) = f(t),\ \ 0 < t < \infty\,, \tag{1}$$

где $A,\ B \in L(E)$, $L(E)$ – банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в E; $f(t) \in C([0, \infty); E)$, $C([0, \infty); E)$ – множество непрерывных функций, действующих из $[0, \infty)$ в E.

Рассмотрим стабилизирующее, то есть, устраняющее вырожденность, возмущение уравнения (1) малым параметром $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \text{const}$, $\varepsilon_0 > 0$:

$$(t+\varepsilon)^2 x''_\varepsilon(t) + (t+\varepsilon)Ax'_\varepsilon(t) + Bx_\varepsilon(t) = f(t),\ \ 0 \le t < \infty, \tag{2}$$

$$x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0},\ \ x'_\varepsilon(0) = x'_{\varepsilon,0}. \tag{3}$$

Пусть

$$\Lambda = \frac{1}{2}(I - A).$$

В работе также используются следующие обозначения: для любого $Q \in L(E)$ $\sigma(Q)$ – спектр оператора Q,

$$\mu_Q = \min\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(Q)\},\ \ \nu_Q = \max\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(Q)\},$$

$$\omega_Q = \max\{\nu_Q, -\mu_Q\}.$$

Заметим, что $\omega_Q \ge 0$.

Пусть

1) операторный дискриминант $D = (A - I)^2 - 4B$ удовлетворяет условию $D = F^2$, где $F \in L(E)$;

2) $AF = FA$;

3) $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_{\lambda>3}$, где $\mathbb{C}_{\lambda>3} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > 3\}$;

4) в предположении, что выполнены условия 1) – 3), справедливо неравенство $\omega_F < 2(-1-\nu_\Lambda)$;

5) $\|x_{\varepsilon,0}\| \le L_0 \cdot \varepsilon^{-1}$, $\|x'_{\varepsilon,0}\| \le L_1 \cdot \varepsilon^{-2}$, где L_0, L_1 – const; L_0, $L_1 > 0$.

Замечание 1. Так как $\omega_F \ge 0$, то для корректности условия 4) необходимо, чтобы

$$-1-\nu_\Lambda > 0.$$

Последнее неравенство следует из условия 3):

$$\sigma(A) \subset \mathbb{C}_{\lambda>3} \Rightarrow \sigma(\Lambda) \subset \mathbb{C}_{\lambda<-1} \Rightarrow \nu_\Lambda < -1 \Rightarrow -1-\nu_\Lambda > 0.$$

В дальнейшем понадобятся косинус оператор-функция с производящим оператором $D_1 = \frac{1}{4}D = \frac{1}{4}F^2$:

$$C(t) = C\left(t,\ \frac{1}{4}F^2\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}Ft} + e^{-\frac{1}{2}Ft}\right) \tag{4}$$

и ассоциированная с ней синус оператор – функция

$$S(t) = S(t,\ \frac{1}{4}F^2) = \int_0^t C(\tau)d\tau. \tag{5}$$

Замечание 2. Если $F \in GL(E)$, где $GL(E) = \{Q \in L(E) | \exists\ Q^{-1} \in L(E)\}$, то $S(t)$ можно записать в виде

$$S(t) = S\left(t,\ \frac{1}{4}F^2\right) = F^{-1}\left(e^{\frac{1}{2}Ft} - e^{-\frac{1}{2}Ft}\right).$$

Теорема. При выполнении условий 1), 2) задача (2), (3) при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеет решение

$$x_\varepsilon(t) = \exp\left(\Lambda \ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left[C\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)x_{\varepsilon,0} + S\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(\varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda x_{\varepsilon,0}\right)\right] +$$
$$+\int_0^t S\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}\right)\frac{f(\tau)}{\tau+\varepsilon}d\tau. \tag{6}$$

При выполнении условий 3) – 5) справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t),\ t \in (0, \infty), \tag{7}$$

где

$$x_0(t) = \int_0^t S\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau. \tag{8}$$

Предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1); это решение ограничено при $t \to +0$; если $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0, \infty)$.

Эта теорема справедлива в силу лемм 1 – 4, доказываемых ниже.

При доказательстве леммы 1 будет использовано следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 0. Задача Коши

$$u''(t) + A_1u'(t) + A_2u(t) = f(t), \quad 0 \le t < \infty, \tag{9}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0 \tag{10}$$

с $A_1, A_2 \in L(E)$; $f(t) \in C([0, \infty); E)$ при условии, что $D = A_1^2 - 4A_2 = F^2$, $A_1F = FA_1$, где $F \in L(E)$, имеет решение

$$u(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}A_1t\right)\left[C(t)u_0 + S(t)\left(u'_0 + \frac{1}{2}A_1u_0\right)\right] +$$

$$+\int_0^t S(t-\tau)\exp\left[-\frac{1}{2}A_1(t-\tau)\right]f(\tau)d\tau, \tag{11}$$

где $C(t)$, $S(t)$ – соответственно косинус и синус оператор-функции с производящим оператором $D_1 = \frac{1}{4}D$.

Доказательство. Учитывая формулы (4), (5), заметим, что

$$C(0) = I, \; S(0) = 0; \tag{12}$$

$$C'(t) = \frac{1}{4}F^2S(t), \; S'(t) = C(t); \tag{13}$$

$$C''(t) = \frac{1}{4}F^2C(t), \; S''(t) = \frac{1}{4}F^2S(t). \tag{14}$$

Докажем, например, первую из формул в (13). Применяя правило дифференцирования операторной экспоненты $(e^{At})' = Ae^{At}$ [1, с. 41], получаем:

$$C'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Fe^{\frac{1}{2}Ft} - \frac{1}{2}Fe^{-\frac{1}{2}Ft}\right) = \frac{1}{4}F\left(e^{\frac{1}{2}Ft} - e^{-\frac{1}{2}Ft}\right) = \frac{1}{4}F\left(e^{\frac{1}{2}F\tau} - e^{-\frac{1}{2}F\tau}\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{1}{4}F\int_0^t\left(e^{\frac{1}{2}F\tau} - e^{-\frac{1}{2}F\tau}\right)'d\tau = \frac{1}{4}F\int_0^t\left(\frac{1}{2}Fe^{\frac{1}{2}F\tau} + \frac{1}{2}Fe^{-\frac{1}{2}F\tau}\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}F^2\int_0^t C(\tau)d\tau = \frac{1}{4}F^2S(t).$$

Остальные из указанных формул очевидны. В силу (12) функция (11) удовлетворяет начальному условию $u(0) = u_0$. Запишем (11) в виде

$$u(t) = e^{-\frac{1}{2}A_1t}\left[C(t)u_0 + S(t)\left(u'_0 + \frac{1}{2}A_1u_0\right) + \int_0^t S(t-\tau)e^{\frac{1}{2}A_1\tau}f(\tau)d\tau\right].$$

Тогда

$$u'(t) = -\frac{1}{2}A_1 e^{-\frac{1}{2}A_1 t}\left[C(t)u_0 + S(t)\left(u_0' + \frac{1}{2}A_1 u_0\right) + \int_0^t S(t-\tau)e^{\frac{1}{2}A_1\tau} f(\tau)d\tau\right] +$$

$$+ e^{-\frac{1}{2}A_1 t}\left[C'(t)u_0 + S'(t)\left(u_0' + \frac{1}{2}A_1 u_0\right) + \int_0^t S'(t-\tau)e^{\frac{1}{2}A_1\tau} f(\tau)d\tau\right],$$

или

$$u'(t) = -\frac{1}{2}A_1 u(t) + e^{-\frac{1}{2}A_1 t}\left[C'(t)u_0 + S'(t)\left(u_0' + \frac{1}{2}A_1 u_0\right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t S'(t-\tau)e^{\frac{1}{2}A_1\tau} f(\tau)d\tau\right].$$

В силу (12), (13) функция (11) удовлетворяет начальному условию $u'(0) = u'_0$. Вычислим $u''(t)$:

$$u''(t) = -\frac{1}{2}A_1 u'(t) - \frac{1}{2}A_1 e^{-\frac{1}{2}A_1 t}\left[C'(t)u_0 + S'(t)\left(u_0' + \frac{1}{2}A_1 u_0\right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t S'(t-\tau)e^{\frac{1}{2}A_1\tau} f(\tau)d\tau\right] + e^{-\frac{1}{2}A_1 t}\left[C''(t)u_0 + S''(t)(u_0' + \frac{1}{2}A_1 u_0) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t S''(t-\tau)e^{\frac{1}{2}A_1\tau} f(\tau)d\tau + e^{\frac{1}{2}A_1 t} f(t)\right].$$

В силу условия $A_1F = FA_1$ и соотношений (14), (15)

$$u''(t) = \frac{1}{2}A_1 u'(t) - \frac{1}{2}A_1\left[u'(t) + \frac{1}{2}A_1 u(t)\right] + \frac{1}{4}F^2 u(t) + f(t),$$

или, учитывая равенство $F^2 - A_1^2 = -4A_2$,

$$u''(t) = f(t) - A_1 u'(t) - A_2 u(t).$$

Тогда

$$u''(t) + A_1 u'(t) + A_2 u(t) =$$

$$= f(t) - A_1 u'(t) - A_2 u(t) + A_1 u'(t) + A_2 u(t) = f(t).$$

Лемма 0 доказана.

Замечание 3. В случае $F \in GL(E)$ формула (11) получена в [2] – [6].

Лемма 1. При выполнении условий 1), 2) функция (6) является решением задачи (2), (3).

Доказательство. Заменой переменной

$$t = \varepsilon\, e^{s} - \varepsilon$$

задача (2), (3) сводится к задаче вида

$$u''_\varepsilon(s)+(A-I)u'_\varepsilon(s)+Bu_\varepsilon(s)=g_\varepsilon(s), \quad 0\le s<\infty, \tag{16}$$

$$u_\varepsilon(0)=x_{\varepsilon,0},\ u'_\varepsilon(0)=\varepsilon x'_{\varepsilon,0}, \tag{17}$$

где $u_\varepsilon(s)=x_\varepsilon(\varepsilon e^s-\varepsilon)$, $g_\varepsilon(s)=f(\varepsilon e^s-\varepsilon)$.

Задача (16), (17) – это задача вида (9), (10). В силу формулы (11) она имеет решение

$$u_\varepsilon(s)=\exp(\Lambda s)\Big[C(s)x_{\varepsilon,0}+S(s)(\varepsilon x'_{\varepsilon,0}-\Lambda x_{\varepsilon,0})\Big]+$$
$$+\int_0^s S(s-\rho)\exp[\Lambda(s-\rho)]g_\varepsilon(\rho)d\rho. \tag{18}$$

После замены переменной

$$\rho=\ln\frac{\tau+\varepsilon}{\varepsilon}$$

в интеграле в правой части (18) и возвращения к прежней переменной t формула (18) принимает вид (6).

Лемма 1 доказана.

Для обоснования предельного перехода (7) потребуются оценки сверху для нормы косинус и синус оператор-функций с производящим оператором Q^2, где $Q\in L(E)$, то есть для функций

$$C(t)=C\left(t,\,Q^2\right)=\frac{1}{2}\left(e^{Qt}+e^{-Qt}\right);$$
$$S(t)=S(t,Q^2)=\int_0^t C(\tau)d\tau.$$

Из соотношения [1, с. 42]

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left\|e^{Qt}\right\|}{t}=\nu_Q$$

следует, что для любого $\delta>0$ найдется такая постоянная $M_\delta>0$, что

$$\left\|e^{Qt}\right\|\le M_\delta e^{\nu_Q^\delta t}, \quad 0\le t<\infty, \tag{19}$$

где $\nu_Q^\delta=\nu_Q+\delta$.

Замечание 4. В силу (19) для любого $\rho>0$ найдется такая постоянная $N_\rho>0$, что

$$\left\|e^{-Qt}\right\|\le N_\rho e^{\nu_{-Q}^\rho t}, \quad 0\le t<\infty, \tag{20}$$

где $\nu_{-Q}^\rho=\nu_{-Q}+\rho$, или $\nu_{-Q}^\rho=-\mu_Q+\rho$, ибо $\nu_{-Q}=-\mu_Q$.

Замечание 5. В силу (19), (20) справедлива оценка

$$\|C(t)\|\le K_{\delta,\rho}e^{\omega_Q^{\delta,\rho}t}, \quad 0\le t<\infty, \tag{21}$$

где $K_{\delta,\rho} = \max\left\{M_\delta, N_\rho\right\}$, $\omega_Q^{\delta,\rho} = \max\left\{\nu_Q^\delta, \nu_{-Q}^\rho\right\}$.

Замечание 6. В силу (21)

$$\|S(t)\| \le \frac{K_{\delta,\rho}}{\omega_Q^{\delta,\rho}}\left(e^{\omega_Q^{\delta,\rho} t} - 1\right),\ 0 \le t < \infty. \tag{22}$$

Действительно,

$$\|S(t)\| \le \int_0^t \|C(\tau)\|\ \ d\tau \le K_{\delta,\rho}\int_0^t e^{\omega_Q^{\delta,\rho}\tau} d\tau = \frac{K_{\delta,\rho}}{\omega_Q^{\delta,\rho}} e^{\omega_Q^{\delta,\rho}\tau}\Bigg|_0^t = \frac{K_{\delta,\rho}}{\omega_Q^{\delta,\rho}}(e^{\omega_Q^{\delta,\rho} t} - 1).$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1) – 4). Тогда функция (8) определена при любом $t \in (0, \infty)$. Эта функция ограничена при $t \to +0$. Если $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $x_0(t)$ ограничена на $(0, \infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. В силу непрерывности синус оператор-функции, операторной экспоненты и функции $f(\tau)$ подынтегральная функция

$$g_0(\tau, t) = S\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\Lambda \ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau}, \tag{23}$$

представляющая собой композицию операторной и векторной функций, непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[\Delta, t]$, Δ – произвольное сколь угодно малое положительное число. Покажем, что

$$\lim_{\tau\to+0} g_0(\tau, t) = 0. \tag{24}$$

В силу (22) при $Q = \frac{1}{2}F$

$$\left\|S\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\right\| \le \frac{K_{\delta,\rho}}{\omega_{\frac{1}{2}F}^{\delta,\rho}}\left[\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\omega_{\frac{1}{2}F}^{\delta,\rho}} - 1\right]. \tag{25}$$

В силу (19) для любого $\delta' > 0$ найдется такая постоянная $M_{\delta'} > 0$, что

$$\left\|\exp\left(\Lambda \ln\frac{t}{\tau}\right)\right\| \le M_{\delta'}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\nu_\Lambda^{\delta'}}, \tag{26}$$

где $\nu_\Lambda^{\delta'} = \nu_\Lambda + \delta'$.

Положим

$$N(t) = \max_{0\le\tau\le t}\|f(\tau)\|.$$

В силу (25), (26)

$$\left\|g_0(\tau,t)\right\| \le \frac{M_{\delta'}\cdot K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}\left[\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}-1\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\frac{\left\|f(\tau)\right\|}{\tau} \le$$

$$\le \frac{M_{\delta'}\cdot K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}\cdot N(t)\cdot t^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}+\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\cdot\tau^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\xrightarrow[\tau\to+0]{}0, \tag{27}$$

ибо в силу условия 4) и за счет выбора δ, ρ, δ′ можно считать, что

$$-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}>0. \tag{28}$$

Действительно,

$$\omega_F<2\left(-1-\nu_\Lambda\right)\Rightarrow \omega_{\frac{1}{2}F}=\max\left\{\nu_{\frac{1}{2}F},\ -\mu_{\frac{1}{2}F}\right\}<-1-\nu_\Lambda\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu_{\frac{1}{2}F}<-1-\nu_\Lambda,-\mu_{\frac{1}{2}F}<-1-\nu_\Lambda\Rightarrow \nu_{\frac{1}{2}F}+\delta=\nu^{\delta}_{\frac{1}{2}F}<-1-\nu_\Lambda,-\mu_{\frac{1}{2}F}+\rho=$$

$$=\nu^{\rho}_{-\frac{1}{2}F}<-1-\nu_\Lambda\Rightarrow \max\left\{\nu^{\delta}_{\frac{1}{2}F},\nu^{\rho}_{-\frac{1}{2}F}\right\}=\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}<-1-\nu_\Lambda\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}<-1-\nu^{\delta'}_{\Lambda}\Rightarrow -1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}>0.$$

Из (27) следует (24). В силу (24) доопределим $g_0(\tau, t)$ по непрерывности в нуле

$$g_0(0,t)=\lim_{\tau\to+0} g_0(\tau,t)=0. \tag{29}$$

Итак, точка $\tau = 0$ является устранимой точкой разрыва подынтегральной функции $g_0(\tau, t)$. Отсюда следует сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^t g_0(\tau,t)\,d\tau,$$

то есть, существование функции (8).

Используя (27), получаем:

$$\left\|\int_0^t g_0(\tau,t)\,d\tau\right\|\le\int_0^t\left\|g_0(\tau,t)\right\|d\tau\le\frac{M_{\delta'}\cdot K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}\cdot N(t)\cdot t^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}+\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\int_0^t\tau^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}d\tau=$$

$$=\frac{M_{\delta'}\cdot K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}\cdot N(t)\cdot t^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}+\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\left.\frac{\tau^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}}{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\right|_0^t=\frac{M_{\delta'}\cdot K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}\left(-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}\right)}N(t),$$

ибо в силу (28)

$$-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda} > 0. \qquad (30)$$

Получена оценка

$$\left\| \int_0^t g_0(\tau,t)\,d\tau \right\| \le \frac{M_{\delta'} \cdot K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}\left(-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}\right)} N(t), \qquad (31)$$

из которой следует ограниченность функции (8) при $t \to +0$. Если $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$:

$$\sup_{t\in[0,\infty)} N(t) = C < \infty,$$

то из (31) следует ограниченность функции (8) на $(0,\infty)$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. При выполнении условий 1) – 5) справедлив предельный переход (7).

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. Покажем вначале, что внеинтегральные члены в (6) сходятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. В силу (19) при $Q = \Lambda$

$$\left\| \exp\left(\Lambda \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \right\| \le M_{\delta'} \left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\nu^{\delta'}_{\Lambda}}. \qquad (32)$$

В силу (21) при $Q = \frac{1}{2}F$

$$\left\| C\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \right\| \le K_{\delta,\rho} \left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}. \qquad (33)$$

В силу (32), (33) и условия 5)

$$\left\| \exp\left(\Lambda \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) C\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) x_{\varepsilon,0} \right\| \le M_{\delta'} K_{\delta,\rho} L_0 (t+\varepsilon)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \varepsilon^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

в силу (28), откуда следует сходимость первого внеинтегрального члена в (6) к нулю при $\varepsilon \to 0$. В силу (22) при $Q = \frac{1}{2}F$

$$\left\| S\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \right\| \le \frac{K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} \left[\left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} - 1\right] \le \frac{K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} \left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}. \qquad (34)$$

В силу (32), (34) и условия 5)

$$\left\| \exp\left(\Lambda \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) S\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \varepsilon\, x'_{\varepsilon,0} \right\| \le \frac{M_{\delta'} K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} L_1 (t+\varepsilon)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \varepsilon^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

откуда следует сходимость второго внеинтегрального члена в (6) к нулю при $\varepsilon \to 0$. В силу (32), (34) и условия 5)

$$\left\| \exp\left(\Lambda \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) S\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \frac{1}{2}(A-I)\, x_{\varepsilon,0} \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2} \frac{M_{\delta'} K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} L_0 \left\| A-I \right\| \; (t+\varepsilon)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \cdot \varepsilon^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0,$$

откуда следует сходимость третьего внеинтегрального члена в (6) к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Для справедливости (7) осталось показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t g_\varepsilon(\tau, t)\, d\tau = \int_0^t g_0(\tau, t)\, d\tau, \tag{35}$$

где

$$g_\varepsilon(\tau, t) = S\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}\right) \exp\left(\Lambda \ln \frac{t+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}\right) \frac{f(\tau)}{\tau+\varepsilon} \;,$$

$g_0(\tau, t)$ задается формулой (23). Для справедливости (35) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \left[g_\varepsilon(\tau, t) - g_0(\tau, t) \right] d\tau = 0. \tag{36}$$

В силу оценки

$$\left\| \int_0^t \left[g_\varepsilon(\tau, t) - g_0(\tau, t) \right] d\tau \right\| \le \int_0^t \left\| g_\varepsilon(\tau, t) - g_0(\tau, t) \right\| d\tau$$

для справедливости (36) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \left\| g_\varepsilon(\tau, t) - g_0(\tau, t) \right\| d\tau = 0. \tag{37}$$

Имеем

$$g_\varepsilon(\tau, t) - g_0(\tau, t) = \int_0^\varepsilon \left[S\left(\ln \frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right) \exp\left(\Lambda \ln \frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right) \frac{f(\tau)}{\tau+\kappa} \right]'_\kappa d\kappa. \tag{38}$$

Обозначим выражение в квадратных скобках в (38) через $h(\kappa)$. Тогда

$$h'(\kappa) = \left[S\left(\ln \frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right) \right]'_\kappa \exp\left(\Lambda \ln \frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right) \frac{f(\tau)}{\tau+\kappa} +$$

$$+ S\left(\ln \frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right) \left[\exp\left(\Lambda \ln \frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right) \right]'_\kappa \frac{f(\tau)}{\tau+\kappa} + S\left(\ln \frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right) \exp\left(\Lambda \ln \frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right) \left(\frac{f(\tau)}{\tau+\kappa} \right)'_\kappa .$$

Учитывая, что

$$\left(\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)'_{\kappa} = -\frac{t-\tau}{(t+\kappa)(\tau+\kappa)} ,$$

получаем:

$$h'(\kappa) = -C\left(\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\frac{t-\tau}{t+\kappa}\frac{f(\tau)}{(\tau+\kappa)^2} -$$

$$-S\left(\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\Lambda\exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\frac{t-\tau}{t+\kappa}\frac{f(\tau)}{(\tau+\kappa)^2} -$$

$$-S\left(\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\frac{f(\tau)}{(\tau+\kappa)^2}. \qquad (39)$$

Обозначая через W_1, W_2, W_3 слагаемые в правой части (39), получаем в силу (38)

$$g_\varepsilon(\tau, t) - g_0(\tau, t) = \int_0^\varepsilon W_1 d\kappa + \int_0^\varepsilon W_2 d\kappa + \int_0^\varepsilon W_3 d\kappa,$$

откуда

$$\| g_\varepsilon(\tau, t) - g_0(\tau, t) \| \le \int_0^\varepsilon \| W_1 \| d\kappa + \int_0^\varepsilon \| W_2 \| d\kappa + \int_0^\varepsilon \| W_3 \| d\kappa \ .$$

Тогда

$$\int_0^t \|g_\varepsilon(\tau,t) - g_0(\tau,t)\| d\tau \le \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \|W_1\| d\kappa\right] d\tau + \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \|W_2\| d\kappa\right] d\tau + \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \|W_3\| d\kappa\right] d\tau. \quad (40)$$

В силу (19), (21)

$$\|W_1\| \le M_{\delta'} K_{\delta,\rho} \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)^{\nu^{\delta'}_{\Lambda}} \frac{t-\tau}{t+\kappa}\frac{\| f(\tau) \|}{(\tau+\kappa)^2} \le$$

$$\le M_{\delta'} K_{\delta,\rho} \frac{N(t)}{t} \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \frac{t-\tau}{(\tau+\kappa)^2}.$$

Тогда

$$\int_0^\varepsilon \|W_1\| d\kappa \le M_{\delta'} K_{\delta,\rho} \frac{N(t)}{t} \int_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \frac{t-\tau}{(\tau+\kappa)^2} d\kappa =$$

$$= -M_{\delta'} K_{\delta,\rho} \frac{N(t)}{t} \int_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_{\Lambda}} d\left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right) =$$

$$= \frac{M_{\delta'} K_{\delta,\rho}}{-1 - \omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \frac{N(t)}{t} \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)^{1 + \omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \Bigg|_0^\varepsilon =$$

$$= \frac{M_{\delta'} K_{\delta,\rho}}{-1 - \omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \frac{N(t)}{t} \left[\left(\frac{\tau+\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^{-1 - \omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} - \left(\frac{\tau}{t}\right)^{-1 - \omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}}\right].$$

Обозначив выражение перед квадратными скобками через $P_1(t)$, получаем оценку

$$\int_0^{\varepsilon}\|W_1\|d\kappa \le P_1(t)\left[\left(\frac{\tau+\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}-\left(\frac{\tau}{t}\right)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\right].$$

Тогда

$$\int_0^t\left[\int_0^{\varepsilon}\|W_1\|d\kappa\right]d\tau \le P_1(t)\int_0^t\left[\left(\frac{\tau+\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}-\left(\frac{\tau}{t}\right)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\right]d\tau=$$

$$=\frac{P_1(t)}{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\left[(t+\varepsilon)\left(\frac{\tau+\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\Bigg|_0^t-t\left(\frac{\tau}{t}\right)^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\Bigg|_0^t\right]=$$

$$=\frac{P_1(t)}{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\left[(t+\varepsilon)\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\right]-t\right]\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$$

в силу (30), откуда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\left[\int_0^{\varepsilon}\|W_1\|d\kappa\right]d\tau=0. \tag{41}$$

Аналогично, в силу (19), (22)

$$\|W_2\|\le\frac{1}{2}\|I-A\|\frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}\frac{N(t)}{t}\left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}+\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\frac{t-\tau}{(\tau+\kappa)^2}.$$

Проведя те же выкладки, что и выше, получаем соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\left[\int_0^{\varepsilon}\|W_2\|d\kappa\right]d\tau=0. \tag{42}$$

В силу (19), (22)

$$\|W_3\|\le\frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}N(t)\left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}+\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\frac{1}{(\tau+\kappa)^2}.$$

Тогда

$$\int_0^{\varepsilon}\|W_3\|d\kappa \le \frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}N(t)\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{\tau+\kappa}{t+\kappa}\right)^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\frac{d\kappa}{(\tau+\kappa)^2}\le$$

$$\le \frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}\frac{N(t)}{t^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}}\int_0^{\varepsilon}(\tau+\kappa)^{-2-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}d\kappa=$$

$$=\frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}N(t)\quad t^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}+\nu^{\delta'}_{\Lambda}}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}\left(-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}\right)}(\tau+\kappa)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\Bigg|_0^{\varepsilon}.$$

Обозначив последнюю дробь через $P_3(t)$, получаем оценку

$$\int_0^{\varepsilon}\|W_3\|\,d\kappa\le P_3(t)\left[(\tau+\varepsilon)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}-\tau^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\right].$$

Тогда

$$\int_0^t\left[\int_0^{\varepsilon}\|W_3\|d\kappa\right]d\tau\le P_3(t)\int_0^t\left[(\tau+\varepsilon)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}-\tau^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\right]d\tau=$$

$$=\frac{P_3(t)}{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\left[(\tau+\varepsilon)^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\Bigg|_0^t-\tau^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\Bigg|_0^t\right]=$$

$$=\frac{P_3(t)}{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\left[(t+\varepsilon)^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}-\varepsilon^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}-t^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\right]\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$$

в силу (30), откуда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\left[\int_0^{\varepsilon}\|W_3\|d\kappa\right]d\tau=0. \tag{43}$$

Из (40), (43) следует (37).

Лемма 3 доказана.

Замечание 7. В силу условия 2)

$$A\,C(t)=C(t)\,A, \tag{44}$$

$$S(t)\,A=A\,S(t). \tag{45}$$

Действительно, соотношение (44) следует из формулы

$$C(t)=C\left(t,\frac{1}{4}F^2\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}Ft}+e^{-\frac{1}{2}Ft}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}F^{2k}}{2^{2k}(2k)!}.$$

Используя (5), (44) и замкнутость оператора A, получаем для любого $\mathrm{v}\in E$

$$AS(t)\mathrm{v}=A\int_0^t C(\tau)\mathrm{v}d\tau=\int_0^t AC(\tau)\mathrm{v}d\tau=\int_0^t C(\tau)A\mathrm{v}d\tau=S(t)A\mathrm{v},$$

что означает справедливость (45).

Лемма 4. При выполнении условий 1) – 5) предельная функция (8) является решением уравнения (1).

Доказательство. В силу (29) подынтегральная функция $g_0(\tau, t)$ непрерывна по переменным τ, t. Применяя (13), получаем

$$\left[g_0(\tau,t)\right]_t'=\frac{1}{t}C\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau}+\frac{1}{t}S\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\Lambda\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau}$$

или в силу (45)

$$\left[g_0(\tau,t)\right]_t'=\frac{1}{t}C\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau}+\Lambda\frac{1}{t}g_0(\tau,t). \tag{46}$$

Покажем, что

$$\lim_{\tau\to+0}\left[g_0(\tau,t)\right]_t'=0. \tag{47}$$

В силу (24) для этого достаточно показать, что первое слагаемое в правой части (46) сходится к нулю при $\tau\to+0$. В силу (19), (21)

$$\left\|\frac{1}{t}C\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau}\right\|\le\frac{1}{t}K_{\delta,\rho}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}M_{\delta'}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\frac{\|f(\tau)\|}{\tau}\le$$

$$\le M_{\delta'}K_{\delta,\rho}N(t)\quad t^{-1+\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}+\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\cdot\tau^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\xrightarrow[\tau\to+0]{}0$$

в силу (28), откуда следует вышесказанное утверждение. В силу (47) доопределим $[g_0(\tau, t)]_t'$ по непрерывности в нуле:

$$\left[g_0(\tau,t)\right]_t'\Big|_{\tau=0}=\lim_{\tau\to+0}\left[g_0(\tau,t)\right]_t'=0. \tag{48}$$

В силу (48) $[g_0(\tau, t)]_t'$ непрерывна по τ, t. Следовательно, можно применить формулу дифференцирования интеграла по параметру

$$x_0'(t)=\left[\int_0^t g_0(\tau,t)d\tau\right]'=\int_0^t\left[g_0(\tau,t)\right]_t'd\tau+g_0(t,t).$$

В силу того, что $S(0) = 0$, $e^{Q\,t}|_{t=0}=I$, получаем

$$g_0(t,\, t) = S(0) I \frac{f(t)}{t} = 0.$$

Тогда

$$x_0'(t) = \int_0^t [g_0(\tau, t)]_t' \, d\tau. \tag{49}$$

Далее, учитывая (46), (13) получаем:

$$[g_0(\tau,\, t)]_{t^2}'' = -\frac{1}{t^2} C\left(\ln\frac{t}{\tau}\right) \exp\left(\Lambda \ln\frac{t}{\tau}\right) \frac{f(\tau)}{\tau} +$$

$$+\frac{1}{t^2}\frac{1}{4} F^2 S\left(\ln\frac{t}{\tau}\right) \exp\left(\Lambda \ln\frac{t}{\tau}\right) \frac{f(\tau)}{\tau} + \frac{1}{t^2} C\left(\ln\frac{t}{\tau}\right) \Lambda \exp\left(\Lambda \ln\frac{t}{\tau}\right) \frac{f(\tau)}{\tau} +$$

$$+\Lambda\left[-\frac{1}{t^2} g_0(\tau, t) + \frac{1}{t} [g_0(\tau, t)]_t'\right].$$

В силу (46)

$$C\left(\ln\frac{t}{\tau}\right) \exp\left(\Lambda \ln\frac{t}{\tau}\right) \frac{f(\tau)}{\tau} = t[g_0(\tau, t)]_t' - \Lambda g_0(\tau, t).$$

Тогда, учитывая (44), получаем:

$$[g_0(\tau,\, t)]_{t^2}'' = -\frac{1}{t}[g_0(\tau, t)]_t' + \Lambda \frac{1}{t^2} g_0(\tau, t) + \frac{1}{4} F^2 \frac{1}{t^2} g_0(\tau, t) +$$

$$+\Lambda \frac{1}{t}[g_0(\tau, t)]_t' - \Lambda^2 \frac{1}{t^2} g_0(\tau, t) - \Lambda \frac{1}{t^2} g_0(\tau, t) + \Lambda \frac{1}{t}[g_0(\tau, t)]_t' =$$

$$= -\frac{1}{t} A[g_0(\tau, t)]_t' + \frac{1}{4}\left[F^2 - (I - A)^2\right] \frac{1}{t^2} g_0(\tau, t) =$$

$$= -\frac{1}{t} A[g_0(\tau, t)]_t' - \frac{1}{t^2} B g_0(\tau, t),$$

ибо в силу условия 1) $F^2 - (I - A)^2 = -4B$. Итак,

$$[g_0(\tau, t)]_{t^2}'' = -\frac{1}{t} A[g_0(\tau, t)]_t' - \frac{1}{t^2} B g_0(\tau, t). \tag{50}$$

В силу (24), (47)

$$\lim_{\tau \to +0} [g_0(\tau, t)]_{t^2}'' = 0. \tag{51}$$

В силу (51) доопределим $[g_0(\tau, t)]_{t^2}''$ по непрерывности в нуле:

$$[g_0(\tau, t)]_{t^2}'' \big|_{\tau=0} = \lim_{\tau \to +0} [g_0(\tau, t)]_{t^2}'' = 0. \tag{52}$$

В силу (52) $[g_0(\tau, t)]_{t^2}''$ непрерывна по τ, t. Следовательно, можно еще раз применить формулу дифференцирования интеграла по параметру. Учитывая (49), (50) а также соотношения $C(0) = I$, $g_0(t, t) = 0$, получаем

$$x_0''(t)=\left[\int_0^t [g_0(\tau,\,t)]_t'\,d\tau\right]'=\int_0^t [g_0(\tau,t)]_{t^2}''\,d\tau+[g_0(\tau,t)]_t'\,|_{\tau=t}=$$

$$=-\frac{1}{t}A\int_0^t [g_0(\tau,t)]_t'\,d\tau-\frac{1}{t^2}B\int_0^t g_0(\tau,t)d\tau+\frac{1}{t}C(0)\frac{f(t)}{t}+\Lambda\frac{1}{t}g_0(t,\,t)=$$

$$=-\frac{1}{t}Ax_0'(t)-\frac{1}{t^2}Bx_0(t)+\frac{f(t)}{t^2}\quad .$$

Итак,

$$x_0''(t)==-\frac{1}{t}Ax_0'(t)-\frac{1}{t^2}Bx_0(t)+\frac{f(t)}{t^2}.$$

Тогда

$$t^2x_0''(t)+tAx_0'(t)+Bx_0(t)=$$
$$=-tAx_0'(t)-Bx_0(t)+f(t)+tAx_0'(t)+Bx_0(t)=f(t).$$

Лемма 4 доказана.

Теорема доказана.

Установленные выше факты дополняют результаты работ [7] – [10].

В скалярном случае малые стабилизирующие возмущения уравнения (1) исследованы в [11].

Список литературы

1. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

2. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве: Тез. докл. / «Понтрягинские чтения – XI». Воронеж: Изд-во ВГУ, 2000. – С. 145.

3. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве (на англ. яз.) // Вестник ТГТУ. – 2000. – Т. 6, №4. – С. 643 – 646.

4. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, №8. – С. 1140 – 1141.

5. Фомин В.И. О представлении решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве через КОФ и СОФ: Материалы VIII науч. конф. Тамб. гос. техн. ун-та. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2003. – С. 37 – 38.

6. Фомин. В.И. О представлении решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве через КОФ и СОФ // Вестник ТГТУ. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2003. – Т. 8, вып. 5. – С. 864 – 865.

7. Фомин В.И. Малые возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами: Тез. докл. / «Понтрягинские чтения – VIII». Воронеж: Изд-во ВГУ, 1997. – С. 156.

8. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами и нулевым операторным дискриминантом // Вестник ТГТУ. – 1999. –Т. 5, №4. – С. 603 – 612.
9. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами и позитивным операторным дискриминантом // Вестник ТГТУ. – 2000. – Т. 6, №1. – С. 114 – 118.
10. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1568 – 1569.
11. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения уравнения Эйлера второго порядка // Вестник ТГТУ. – 1999. – Т. 5, № 2. – С. 266 – 270.

On Euler Equation of the Second Order with Bounded Operator Coefficients in Banach Space

V.I. Fomin

Department "Applied Mathematics and Mechanics", TSTU

Key words and phrases: Banach space; singular differentiation equation; small stabilization perturbation; bounded solution; degenerate point; operator spectrum; operator discriminant; cosine operator function; sine operator function.

Abstract: In the Banach space we can find the solution of the equation form the title of the article, bounded in a generate point, by means of the method of small stabilization perturbation.

Über Euler-Vektorgleichung der zweiten Ordnung mit den begrenzten Operatorkoeffizienten im Banachischen Raum

Zusammenfassung: Es wird die im Degenerationspunkt begrenzte Lösung der im Titel angegebenen Gleichung durch die Methode von kleinen Stabilisierungsstörungen im Banachischen Raum gesucht.

Sur l'équation vectorielle Euler du deuxième ordre avec les coefficients opérateurs limités dans l'espace de Banach

Résumé: Dans l'espace de Banach on trouve par la méthode de petites perturbations stabilisantes la solution limitée dans le point de la dégénération pour l'équation citée dans le titre de l'article.
