УДК 517.911

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ВОЗМУЩЕННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЯМ. ЧАСТЬ 1

А.И. Булгаков [2] , Н.П. Пучков [1] , В.В. Скоморохов [1] , А.А. Григоренко [2] , О.П. Беляева [2]

Кафедры: «Высшая математика», ТГТУ (1); «Алгебра и геометрия», ТГУ им. Г.Р. Державина (2)

Ключевые слова и фразы: аппроксимация отображения; возмущенные включения; дифференциальные включения; многозначные отображения; функциональные включения.

Аннотация: Изучается включение, правая часть которого состоит из алгебраической суммы значений «хорошего» (имеющего замкнутые образы) и «плохого» (не обладающего свойством замкнутости и выпуклости значений) многозначных отображений. Такие включения называются возмущенными. В первой части статьи сформулированы основы теории таких включений, причем здесь доказано, что множество решений таких включений может терять свойство устойчивости («небольшие» изменения правой части могут привести к существенному изменению множества решений). Сформулировано необходимое и достаточное условие, когда выполняется свойство устойчивости множества решений.

Введение

Теория многозначных возмущенных включений стала оформляться сравнительно недавно. В связи с тем, что правая часть такого включения представляет собой алгебраическую сумму значений многозначных отображений, у которых одно отображение обладает свойством замкнутости значений, а другое не обладает этим свойством, то оператор, порожденный правой частью этого включения, не обладает свойством замкнутости значений. Поэтому все имеющиеся в настоящие время методы исследования (теорема Какутани, принцип сжимающих отображений) непосредственно применить для изучения вопросов существования решений таких возмущенных включений нельзя. В тоже время к таким включениям сводятся многие задачи дифференциальных и интегральных включений теорий аппроксимации, управления и игр. Таким образом, построение основ теории возмущенных многозначных включений представляет не только теоретический, но и практический интерес.

Основы теории возмущений заложены в работах [1 – 4], в которых для случая, когда «хорошее» многозначное отображение имеет выпуклые замкнутые образы, рассмотрены вопросы существования решений возмущенных включений, а также топологические свойства множеств решений и квазирешений таких включений. В частности, в этих работах получены оценки близости решений к наперед заданной непрерывной функции, которые позволяют путем подбора функций определелить приближенное решение возмущенного включения и дать оценку погрешности этого приближенного решения. Кроме того, доказано, что множество квазирешений возмущенного включения совпадает с множеством решений «овыпукленного» включения. На основе этого утверждения и полученных в [1 – 4] оценок доказан принцип плотности и «бэнг-бэнг» принцип. Доказательство этих свойств в [3] основывалось на теореме Майкла [24], с помощью которой доказывалось существование в некотором смысле «минимальной» непрерывной ветви у «хорошего» многозначного отображения с выпуклыми образами. В данной работе не предполагается, что «хорошее» многозначное отображение имеет выпуклые образы. Поэтому применить теорему Майкла [24] для исследования такого возмущенного включения невозможно. Исследования в этом случае здесь осуществляются на основе теоремы 1, сформулированной в п. 1.

В п. 2 исследуются возмущенные включения с внешними возмущениями. Здесь доказано, что «небольшими» внешними возмущениями нельзя пренебрегать, поскольку они могут изменить существенно множество решений возмущенного включения. Таким образом это доказывает, что если правая часть включения не обладает свойством замкнутости значений, то может нарушаться принцип устойчивости множеств решений от «небольших» изменений правой части. Сформулировано необходимое и достаточное условие (названное принципом плотности), когда сохраняется устойчивость множества решений.

Обозначения и некоторые определения

Пусть X – нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Обозначим $B_X[x,\varepsilon]$ – открытый шар пространства X с центром в точке $x \in X$ и радиусом $\varepsilon > 0$, если $\varepsilon = 0$, то $B_X[x,0] \equiv x$. Пусть $U \subset X$. Тогда $\overline{U}$ – замыкание множества U; $\operatorname{co} U$ – выпуклая оболочка множества U; $\overline{\operatorname{co}} U \equiv \overline{\operatorname{co} U}$; $\operatorname{ext} U$ – множество крайних точек множества U; $\overline{\operatorname{ext}} U = \overline{\operatorname{ext} U}$; $\|U\|_X = \sup\limits_{u \in U} \|u\|_X$; $\Omega(U)$ – множество всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств множества U; $U^\varepsilon \equiv \overline{\bigcup_{u \in U} B[u,\varepsilon]}$, если $\varepsilon > 0$, и $U^0 \equiv \overline{U}$; $\rho_X[x,U]$ – расстояние от точки $x \in X$ до множества U в пространстве X; $h_X[\cdot\,;\cdot]$ – расстояние по Хаусдорфу в пространстве X до соответствующих множеств; $\operatorname{comp} X$ – множество всех непустых компактов пространства X.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное пространство вектор-столбцов, с нормой $|\cdot|$. Обозначим $C^n[a,b]$ $(D^n[a,b])$ пространство непрерывных (абсолютно непрерывных) функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{C^n[a,b]} = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$ $(\|x\|_{D^n[a,b]} = |x(a)| + \int_a^b |\dot{x}(s)|\, ds)$. Пусть $\mathcal{U} \subset [a,b]$ – измеримое множество $\mu(\mathcal{U}) > 0$ (μ – мера Лебега), обозначим $L^n(\mathcal{U})$ – пространство суммируемых функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} |x(s)| ds$.

Пусть $\Phi \subset L^n[a,b]$. Будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению*, если для любых $x, y \in \Phi$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется включение $\chi(\mathcal{U})x + \chi([a,b]\backslash\mathcal{U})y \in \Phi$, где $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция соответствующего множества. Обозначим через $\Pi[L^n[a,b]]$ множество всех ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $L^n[a,b]$. Через $\Omega(\Pi[L^n[a,b]])$ обозначим множество всех непустых выпуклых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $L^n[a,b]$.

Пусть $F: [a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ измеримое отображение. Обозначим $S(F) = \{y \in L^n[a,b] : y(t) \in F(t) \quad \text{при п. в.} \quad t \in [a,b]\}$.

Обозначим $C^1_+[a,b]$ $(L^1_+[a,b])$ конус неотрицательной функций пространства $C^1[a,b]$ $(L^1[a,b])$.

Измеримость однозначных функций везде понимается здесь по Лебегу, измеримость многозначных функций понимается в смысле [5].

Если $X = \mathbb{R}^n$, то в этом случае для сокращения записи индекс $\mathbb{R}^n$ в обозначениях расстояний опускаем.

1 Некоторые результаты возмущенного включения с компактнозначным отображением

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \tag{1}$$

где $\Psi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}\, C^n[a,b]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ – многозначные отображения, линейный непрерывный интегральный оператор $V: L^n[a,b] \to C^n[a,b]$ определен равенством

$$(Vz)(t) = \int_a^b V(t,s)z(s)ds, \quad t \in [a,b]. \tag{2}$$

Включение (1) назовем *возмущенным включением*.

Под решением включения (1) будем понимать элемент $x \in C^n[a,b]$, удовлетворяющий (1). Таким образом, непрерывная функция $x: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ является решением включения (1) тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $v \in \Psi(x)$ и $z \in \Phi(x)$, что справедливо равенство $x = v + Vz$.

Пусть $q_0 \in C^n[a,b]$, $r_0 \in \Psi(q_0)$ и $w_0 \in L^n[a,b]$. Представим функцию q_0 в виде

$$q_0 = r_0 + Vw_0 + e, \tag{3}$$

где $e = q_0 - r_0 - Vw_0$. Предположим, что функция $k \in L^1[a,b]$ для каждого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{L^n(\mathcal{U})}[w_0, \Phi(q_0)] \leqslant \int_{\mathcal{U}} k(s)ds, \tag{4}$$

а непрерывная функция $\nu\colon [a,b] \to [0,\infty)$ определена соотношением

$$\nu(t) = \int_a^b |V(t,s)|k(s)ds + |e(t)|, \tag{5}$$

где $|V(t,s)|$ – согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $n \times n$ матрицы $V(t,s)$ в представлении (1), $e \in C^n[a,b]$ – функция в правой части равенства (3).

Будем говорить, что отображения $V: L^n[a,b] \to C^n[a,b]$, $\Psi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* A, если найдутся непрерывные изотонные операторы $\Gamma\colon C^1_+[a,b] \to L^1_+[a,b]$ и $P : C^1_+[a,b] \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие условиям: для любых $x,\ y \in C^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняются неравенства

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x),\Phi(y)] \leqslant \|\Gamma(Z(x-y))\|_{L^1(\mathcal{U})}; \tag{6}$$

$$h_{C^n[a,b]}[\Psi(x),\Psi(y)] \leqslant P(Z(x-y)); \tag{7}$$

для функции $\nu \in C^1_+[a,b]$, определенной соотношением (5), сходится в пространстве $C^1[a,b]$ ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i\nu, \quad \mathcal{A}^0\nu = \nu, \quad \mathcal{A}^i\nu = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{i-1}\nu\right), \quad i = 1,2,..., \tag{8}$$

где непрерывный оператор $\mathcal{A}\colon C^1_+[a,b] \to C^1_+[a,b]$ определен равенством

$$(\mathcal{A}z)(t) = \int_a^b |V(t,s)|(\Gamma z)(s)ds + P(z), \tag{9}$$

а отображение $Z : C^n[a,b] \to C^1_+[a,b]$ определено соотношением

$$(Zx)(t) = |x(t)|.$$

Пусть $\xi(\nu)$ – сумма ряда (8), то есть

$$\xi(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i\nu. \tag{10}$$

Будем говорить, что отображения $V : L^n[a,b] \to C^n[a,b]$, $\Psi\colon C^n[a,b] \to \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* A^*, если найдутся непрерывные изотонные операторы $\Gamma\colon C^1_+[a,b] \to L^1_+[a,b]$ и $P : C^1_+[a,b] \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие неравенствам (6), (7), а также соотношениям $\Gamma(0)=0$, $P(0)=0$ и, кроме того, для любой функции $\widetilde{\nu} \in C^1_+[a,b]$ из некоторой окрестности 0 ряд (8) сходится в пространстве $C^1[a,b]$ и его сумма непрерывна в 0.

Теорема 1. *Пусть* $q_0 \in C^n[a,b]$, $r_0 \in \Psi(q_0)$, $w_0 \in L^n[a,b]$ *и пусть функция* q_0 *представима равенством* (3)*. Далее пусть отображения* $V : L^n[a,b] \to \to C^n[a,b]$, $\Psi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством A. Тогда найдется такое решение* x $(x = v + Vz,\ v \in \Psi(x),\ z \in \in \Phi(x))$ *включения* (1)*, для которого выполняются следующие оценки: при любом* $t \in [a,b]$

$$|x(t) - q_0(t)| \leqslant \xi(\nu)(t);$$

$$\|v - r_0\|_{C^n[a,b]} \leqslant P(\xi(\nu));$$

при почти всех $t \in [a,b]$

$$|z(t) - w_0(t)| \leqslant k(t) + (\Gamma\xi(\nu))(t),$$

где $\nu, \xi(\nu), P, \Gamma, k$ *удовлетворяют соотношениям* (5)*,* (10)*,* (7)*,* (6)*,* (4)*, соответственно.*

***Замечание* 1.** Отметим, что теорема 1 дополняет результат работы [3], в которой аналогичные оценки получены в случае выпуклозначности отображения $\Psi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$. При этом в [3] доказательство этих оценок основывалось на теореме Майкла [24], с помощью которой доказывалось существование в некотором смысле «минимальной» непрерывной ветви $g: C^n[a,b] \to C^n[a,b]$ отображения $\Psi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$, а также с помощью результата работы [6]. Предложенную в работе [3] схему для доказательства теоремы 1 применить невозможно, поскольку теорема 1 не предполагает, что отображение $\Psi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$ выпуклозначно.

***Замечание* 2.** Отметим, что теорема 1 не является непосредственным следствием принципа сжимающих отображений (см. [5]), поскольку оператор, порожденный правой частью включения (1) не является замкнутозначным.

***Замечание* 3.** Отметим, что теорема 1 дает несколько больше, чем просто условия существования решения включения (1). Она дает способ нахождения приближенного решения путем подбора функции $q_0 \in C^n[a,b]$. При этом функция $\xi(\nu)$, зависящая от функции $q_0, r_0 \in C^n[a,b]$ и $w_0 \in L^n[a,b]$, дает оценку погрешности приближенного решения (функции q_0) включения (1).

***Замечание* 4.** Отметим, что если непрерывный оператор $\mathcal{A}\colon C^1_+[a,b] \to C^1_+[a,b]$, определенный равенством (9), для любых $z_1, z_2 \in C^1_+[a,b]$ удовлетворяет соотношению $\mathcal{A}(z_1 + z_2) = \mathcal{A}(z_1) + \mathcal{A}(z_2)$, то сумма ряда (8) является решением уравнения

$$\xi(\nu) = \mathcal{A}(\xi(\nu)) + \nu.$$

В качестве приложения теоремы 1 рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [a,b], \quad x(a) = x_0, \tag{11}$$

где отображение $F: [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ обладает следующими свойствами: для всех $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо; существует такая функция $\beta \in L^1_+[a,b]$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$h[F(t,x), F(t,y)] \leqslant \beta(t)|x - y|; \tag{12}$$

существует такая функция $\gamma \in L^1_+[a,b]$, что при почти всех $t \in [a,b]$ имеет место оценка $\|F(t,0)\| \leqslant \gamma(t)$.

Под решением задачи (11) понимаем абсолютно непрерывную функцию $x: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, при почти всех $t \in [a,b]$ удовлетворяющую включению (11) и равенству $x(a) = x_0$.

Напомним, что многозначный оператор Немыцкого $\mathcal{N}\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, порожденный отображением $F: [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определяется равенством

$$\mathcal{N}(x) = \{y \in L^n[a,b]: \ y(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a,b]\}.$$

Очевидно, что задача (11) эквивалентна интегральному включению

$$x \in x_0 + \Lambda\mathcal{N}(x), \tag{13}$$

где оператор $\Lambda\colon L^n[a,b] \to D^n[a,b]$ определен равенством

$$(\Lambda z)(t) = \int_a^t z(s)\, ds.$$

Этот оператор будем называть оператором интегрирования. Включение (13) является частным случаем (1). При этом отображение $\widetilde{\Psi}\colon C^n[a,b] \to \operatorname{comp}[C^n[a,b]]$ в данном случае определяется равенством $\widetilde{\Psi}(x) = x_0$.

Пусть функция $q_0\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна. В этом случае равенство (3) принимает вид

$$q_0 = x_0 + \Lambda\dot{q}_0 + e,$$

где $e = q_0(a) - x_0$, $\dot{q}_0 \in L^n[a,b]$ – производная функции q_0. Далее, пусть функция $\widetilde{k} \in L^1_+[a,b]$ при почти всех $t \in [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho[\dot{q}_0(t), F(t, q_0(t))] \leqslant \widetilde{k}(t).$$

Отметим, что функция $\widetilde{k}$ удовлетворяет неравенству (4), в котором Φ – оператор Немыцкого $\mathcal{N}\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, порожденный отображением $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$. Для рассматриваемого случая непрерывная функция $\nu\colon [a,b] \to [0,\infty)$ имеет вид

$$\nu(t) = \int_a^t \widetilde{k}(s)\,ds + |q_0(a) - x_0|. \tag{14}$$

Покажем, что отображения $\Lambda\colon L^n[a,b] \to C^n[a,b]$, $\widetilde{\Psi}\colon C^n[a,b] \to$ $\to \operatorname{comp}[C^n[a,b]]$, $\mathcal{N}\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ обладают свойством A. Действительно, для этих отображений непрерывные изотонные операторы $\Gamma\colon C^1_+[a,b] \to L^1_+[a,b]$ и $P\colon C^1_+[a,b] \to \mathbb{R}^1$ определяются равенствами

$$(\Gamma z)(t) = \beta(t) z(t), \quad P(z) = 0,$$

где функция $\beta \in L^1_+[a,b]$ удовлетворяет неравенству (12). Кроме того, для функции ν, определенной равенством (14), сходится ряд (8), в котором оператор $\mathcal{A}\colon C^1_+[a,b] \to C^1_+[a,b]$ задан соотношением

$$(\mathcal{A}z)(t) = \int_a^t \beta(s) z(s)\,ds.$$

Отметим, что в силу замечания 4 сумма ряда (8) в данном случае представляет собой решение уравнения

$$\xi(\nu)(t) = \int_a^t \beta(s)\xi(\nu)(s)\,ds + \nu(t), \tag{15}$$

где функция $\nu \in C^1_+[a,b]$ удовлетворяет равенству (14). Решение уравнения (15) имеет вид

$$\xi(\nu)(t) = |x_0 - q_0(a)| e^{\varphi(t)} + \int_a^t e^{\varphi(t) - \varphi(s)} \widetilde{k}(s)\,ds,$$

где функция $\varphi \in C^1_+[a,b]$ задается равенством

$$\varphi(t) = \int_a^t \beta(s)\,ds.$$

Таким образом, из теоремы 1 вытекает оценка А.Ф. Филиппова [7, 8].

Ниже сформулированы теоремы о свойствах множеств решений и квазирешений возмущенного включения в пространстве непрерывных функций.

Аналогично [3] будем говорить, что функция $x \in C^n[a,b]$ является *квазирешением включения* (1), если найдется такой элемент $v \in \Psi(x)$ и такая последовательность

$$z_i \in \Phi(x), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

что последовательность $x_i = v + Vz_i \to x$ в $C^n[a,b]$ при $i \to \infty$. Обозначим $\mathcal{H}$ – множество всех квазирешений включения (1).

Далее, будем считать, что если x – квазирешение включения (1) и $x \in U \subset C^n[a,b]$, то найдется такой элемент $v \in \Psi(x)$ и такая последовательность $z_i \in L^n[a,b]$, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющая включению (16), что для любого $i = 1, 2, \ldots$ выполняется включение $x_i = v + Vz_i \in U$ и $x_i \to x$ в $C^n[a,b]$ при $i \to \infty$.

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\overline{\text{co}}\,(\Phi(x)). \tag{17}$$

Включение (17), по аналогии с [3], будем называть *«овыпукленным», возмущенным включением* или просто «овыпукленным» включением.

Пусть H_{co} – множество решений включения (17). Справедливо следующее утверждение для квазирешений включения (1).

Теорема 2. *Пусть линейный непрерывный оператор $V : L^n[a,b] \to C^n[a,b]$, определенный равенством* (2)*, переводит каждое слабо компактное в $L^n[a,b]$ множество в предкомпактное множество пространства $C^n[a,b]$. Тогда справедливо равенство $\mathcal{H} = H_{\text{co}}$.*

***Замечание* 5.** Отметим, что теорема 2 справедлива без какой-либо непрерывности отображений $\Psi\colon C^n[a,b] \to \text{comp}[C^n[a,b]]$ и $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$.

***Замечание* 6.** Понятие квазитраектории дано Важевским [9, 25] для дифференциальных включений. Приведенное выше определение квазирешения возмущенного включения с точки зрения дифференциальных включений несколько отличается от определения квазитраектории по Важевскому наличием условия (16) (это условие для дифференциальных включений означает, что производные функций x_i, $i = 1, 2, \ldots$ принадлежат значению $\mathcal{N}(x)$ оператора Немыцкого $\mathcal{N}\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, порожденного отображением $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$). Отметим, что сформулированное выше определение квазирешения более удобно для приложений. Кроме того, наличие включения (16) позволяет доказать основное свойство квазирешений (теорема 2) при более общих условиях даже для дифференциальных включений (не предполагая непрерывности отображения $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, правой части дифференциального включения, по второму аргументу, для этого достаточно потребовать суперпозиционную измеримость отображения $F(\cdot, \cdot)$ [3, 10]. Отметим, также, что впервые свойства квазирешений (квазитраекторий) были использованы А.Ф. Филипповым для доказательства принципа плотности задачи Коши для дифференциального включения с невыпуклой правой частью [8].

Пусть многозначное отображение $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ обладает свойством: при каждом фиксированном $x \in C^n[a,b]$ отображение $\Delta(\cdot, x)$ измеримо и удовлетворяет равенству

$$\Phi(x) = \{y \in L^n[a,b] : y(t) \in \Delta(t,x) \quad \text{при п. в.} \quad t \in [a,b]\}.$$

Такое отображение существует [11, 26].

Заметим, что для любого $x \in C^n[a,b]$ многозначное отображение $\Delta(\cdot,x)\colon [a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ ограничено суммируемой функцией.

Отметим, что если Φ есть многозначный оператор Немыцкого, порожденный функцией $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, то для оператора Немыцкого отображение $\Delta_1 : [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ определяется равенством

$$\Delta_1(t,x) = F(t,x(t)).$$

Поэтому, в этом случае, можно отождествить $\Delta_1(\cdot,\cdot)$ с $F(\cdot,\cdot)$. В связи с этим, в общем случае, естественно назвать отображение $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *отображением порождающим оператор* $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$.

Рассмотрим многозначное отображение $\widetilde{\Delta}\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$. Отображение $\widetilde{\Delta}(\cdot,\cdot)$ назовем *интегрально непрерывным в точке* $x \in C^n[a,b]$, если для любой последовательности $x_i \in C^n[a,b]$, $i = 1,2,\ldots$ сходящейся к x в пространстве $C^n[a,b]$ при $i \to \infty$, выполняется равенство

$$\lim_{i\to\infty} \int_a^b h\,[\widetilde{\Delta}(t,x_i);\widetilde{\Delta}(t,x)]\,dt = 0.$$

Отображение $\widetilde{\Delta}\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ назовем *интегрально непрерывным на пространстве* $C^n[a,b]$, если оно интегрально непрерывно в каждой точке $x \in C^n[a,b]$.

Лемма 1. *Пусть множества* $\Phi_i \in \Pi[L^n[a,b]]$, $i = 1,2$ *и измеримые отображения* $\Delta_i : [a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i = 1,2$ *связаны между собой соотношениями* $\Phi_i = S(\Delta_i(\cdot))$, $i = 1,2$. *Тогда для любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *выполняются неравенства*

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi_1;\Phi_2] \leqslant \int_{\mathcal{U}} h\,[\Delta_1(t);\Delta_2(t)]\,dt \leqslant 2h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi_1;\Phi_2].$$

Из леммы 1 вытекает

Теорема 3. *Отображение* $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *непрерывно по Хаусдорфу в точке в том и только в том случае, когда отображение* $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *порождающее отображение* $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, *интегрально непрерывно в этой точке.*

***Замечание* 7.** Поскольку для любого $x \in C^n[a,b]$ имеет место равенство $(\mathrm{co}\,\Phi)(x) = S(\mathrm{co}\,\Delta(\cdot,x))$ [11], то согласно [11] для любых $x,y \in C^n[a,b]$ и для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ получим соотношение

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[(\mathrm{co}\,\Phi)(x);(\mathrm{co}\,\Phi)(y)] \leqslant \int_{\mathcal{U}} h\,[\mathrm{co}(\Delta(t,x);\mathrm{co}(\Delta(t,y))]\,dt. \tag{18}$$

Так как при любых $t \in [a,b]$ и $x \in C^n[a,b]$ $\Delta(t,x) \in \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, то из [12] для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ вытекает оценка

$$\int_{\mathcal{U}} h\,[\mathrm{co}(\Delta(t,x));\ \mathrm{co}(\Delta(t,y))]\,dt \leqslant \int_{\mathcal{U}} h\,[\Delta(t,x);\Delta(t,y)]\,dt, \tag{19}$$

где отображение $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ порождает отображение $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$. Поэтому из леммы 1 и неравенств (18), (19) для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ получаем соотношение

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[(\mathrm{co}\,\Phi)(x);(\mathrm{co}\,\Phi)(y)] \leqslant 2\,h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x);\Phi(y)].$$

Следовательно, из непрерывности по Хаусдорфу многозначного отображения $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ следует непрерывность по Хаусдорфу многозначного отображения $\mathrm{co}\,\Phi\colon C^n[a,b] \to \Omega(\Pi[L^n[a,b]])$.

Будем говорить, что отображение $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *ослаблено замкнуто в* $x \in C^n[a,b]$, если для любой последовательности x_i, $i = 1, 2, \ldots$ сходящейся в пространстве $C^n[a,b]$ при $i \to \infty$ к x любой последовательности $y_i \in \Phi(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, сходящейся слабо в $L^n[a,b]$ при $i \to \infty$ к y выполняется включение $y \in \Phi(x)$. Если отображение Φ ослаблено замкнуто в каждой точке пространства $C^n[a,b]$, то будем говорить, что отображение Φ *ослаблено замкнуто на* $C^n[a,b]$ [13].

Лемма 2. *Если отображение* $\mathrm{co}\,\Phi\colon C^n[a,b] \to \Omega(\Pi[L^n[a,b]])$ *полунепрерывно сверху по Хаусдорфу на* $C^n[a,b]$, *то отображение* $\mathrm{co}\,\Phi$ *ослаблено замкнуто на* $C^n[a,b]$.

Из леммы 2 и замечания 7 вытекает

Следствие 1. *Если отображение* $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *непрерывно, то отображение* $\mathrm{co}\,\Phi\colon C^n[a,b] \to \Omega(\Pi[L^n[a,b]])$ *ослаблено замкнуто.*

Лемма 3. *Пусть многозначное отображение* $\mathrm{co}\,\Phi\colon C^n[a,b] \to \Omega(\Pi[L^n[a,b]])$ *полунепрерывно сверху по Хаусдорфу. Тогда отображение* $\mathrm{co}\,\Phi$ *переводит каждое компактное множество пространства* $C^n[a,b]$ *в слабо компактное множество пространства* $L^n[a,b]$.

Теорема 4. *Пусть отображение* $V\colon L^n[a,b] \to C^n[a,b]$ *непрерывно, а многозначные отображения* $\Psi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$, $\mathrm{co}\,\Phi\colon C^n[a,b] \to \Omega(\Pi[L^n[a,b]])$ *полунепрерывны сверху по Хаусдорфу. Тогда множество* H_{co} *замкнуто в пространстве* $C^n[a,b]$.

Будем говорить, что отображения $V\colon L^n[a,b] \to C^n[a,b]$, $\Psi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством B*, если эти отображения обладают свойством A^* и оператор V переводит каждое слабо компактное в $L^n[a,b]$ множество в предкомпактное множество пространства $C^n[a,b]$.

Пусть H – множество решений включения (1).

Теорема 5. *Пусть отображения* $V\colon L^n[a,b] \to C^n[a,b]$, $\Psi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством B. Тогда множество* $H \neq \varnothing$ *и справедливо равенство*

$$\overline{H} = H_{\mathrm{co}}, \tag{20}$$

где $\overline{H}$ *– замыкание множества* H *в пространстве* $C^n[a,b]$.

***Замечание* 8.** Из рассмотренного приложения к теореме 1 имеем, что из теоремы 5 вытекает теорема А.Ф. Филиппова [8].

***Замечание* 9.** Отметим, что выполнение равенства (20) в последнее время называют принципом плотности [3]. Принцип плотности выполняется не всегда. Это доказывает пример Плиса [9, 27].

***Замечание* 10.** Отметим, что теорема 5 в отличие от [3] не предполагает выпуклозначности отображения $\Psi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$ и поэтому теорема 5 уточняет аналогичный результат из [3].

***Замечание* 11.** Вопрос о плотности множества решений для задачи Коши дифференциального включения с невыпуклой правой частью во множестве решений «овыпукленного» включения был поставлен и решен А.Ф. Филипповым [8]. Распространением и уточнением теоремы А.Ф. Филиппова для более общих случаев занимались многие авторы (например, [14 – 30, 22]). Дляпериодических решений и для краевых задач дифференциальных включений эта задача впервые решена в работах [1 – 4, 6, 11, 19]. Отметим, что свойство плотности множества решений, как отмечено Пианижиани [30], является фундаментальным свойством в теории дифференциальных включений с невыпуклой правой частью. Кроме того, как показано в работах [10, 20, 21], это свойство играет важную роль в теории устойчивости и аппроксимации дифференциальных включений, так как оно является необходимым и достаточным условием непрерывной зависимости множества решений относительно внутренних и внешних возмущений [20, 21, 23]. Поэтому оно занимает центральное место в теории и приложениях дифференциальных включений. Следовательно, вопрос о плотности множества решений имеет важное значение и в теории возмущенных включений, так как дифференциальное включение является частным случаем возмущенного включения.

Для каждого $x \in C^n[a,b]$ определим отображение

$$\operatorname{ext}\Delta(\cdot,x)(t) = \overline{\operatorname{ext}}(\operatorname{co}\Delta(t,x)).$$

Отметим, что многозначное отображение $\operatorname{ext}\Delta(\cdot,x)$ измеримо [12] и ограничено суммируемой функцией.

Рассмотрим отображение $\operatorname{ext}\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ заданное соотношением

$$(\operatorname{ext}\Phi)(x) = \{y \in L^n[a,b] : y(t) \in \overline{\operatorname{ext}}(\operatorname{co}\Delta(t,x)) \quad \text{при п. в.} \quad t \in [a,b]\}. \tag{21}$$

Отметим, что из сделанного выше замечания, а также из определения отображения $\operatorname{ext}\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ вытекает, что для многозначного оператора Немыцкого $\mathcal{N}\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, порожденного функцией $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$, отображение $\operatorname{ext}\mathcal{N}\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ есть оператор Немыцкого, порожденный функцией $\operatorname{ext}F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенный равенством

$$(\operatorname{ext}F)(t,x) = \overline{\operatorname{ext}}(\operatorname{co}F(t,x)).$$

***Замечание* 12.** Отметим, что для любого $x \in C^n[a,b]$ множество $(\operatorname{ext}\Phi)(x)$ обладает свойством

$$\operatorname{co}((\operatorname{ext}\Phi)(x)) = \overline{\operatorname{co}}\Phi(x). \tag{22}$$

Причем множество $(\operatorname{ext}\Phi)(x)$ – минимальное по включению среди непустых, замкнутых в пространстве $L^n[a,b]$, выпуклых по переключению подмножеств, принадлежащих множеству $\Phi(x)$ и удовлетворяющих равенству (22).

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V(\operatorname{ext}\Phi)(x), \tag{23}$$

где отображение $\operatorname{ext}\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ определено равенством (21). Пусть $\mathcal{H}_{\text{ext}}$, H_{ext} множества всех квазирешений и решений включения (23), соответственно.

Следствие 2. *Пусть линейный непрерывный оператор* $V: L^n[a,b] \to \to C^n[a,b]$, *определенный равенством* (1), *переводит каждое слабо компактное в* $L^n[a,b]$ *множество в предкомпактное множество пространства* $C^n[a,b]$. *Тогда справедливо равенство* $H_{\mathrm{co}} = \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}$.

Ниже сформулирована теорема о так называемом «бэнг-бэнг» принципе возмущенного включения. Отметим, что «бэнг-бэнг» принцип играет важную роль в теории управления, поскольку позволяет «упростить» систему управления путем сужения множества допустимых значений управления. При этом замыкания в пространстве непрерывных функций множеств траекторий первоначальной системы управления и упрощенной совпадают. Таким образом, «возможности» упрощенной системы управления в этом случае сравнимы с первоначальной. В то же время «управлять» упрощенной системой гораздо проще, так как множество допустимых управлений существенно сужается (во многих случаях допустимое управление можно осуществлять простыми, с точки зрения вычислений, функциями, иногда их называют релейными).

По аналогии с [3, 11, 14, 15] будем говорить, что для включения (1) выполняется «бэнг-бэнг» принцип, если выполняются равенства

$$\overline{H_{\mathrm{ext}}} = \overline{H} = H_{\mathrm{co}}, \tag{24}$$

где $\overline{H_{\mathrm{ext}}}$, $\overline{H}$ – замыкания множеств H_{ext}, H в пространстве $C^n[a,b]$.

Будем говорить, что множество H_{co} *разложимо по многозначным отображениям* $\Psi, \mathrm{co}\,\Phi$ или просто разложимо, если каждое решение $x \in H_{\mathrm{co}}$ однозначно представимо в виде

$$x = v + Vz,$$

где $v \in \Psi(x)$, $z \in (\mathrm{co}\,\Phi)(x)$.

Будем говорить, что отображения $V: L^n[a,b] \to C^n[a,b]$, $\Psi\colon C^n[a,b] \to \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* B^*, если эти отображения обладают свойством B, ядро оператора V состоит только из нулевого элемента, а множество H_{co} разложимо.

Теорема 6. *Пусть отображения* $V: L^n[a,b] \to C^n[a,b]$, $\Psi\colon C^n[a,b] \to \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$, $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* B^*. *Тогда* $H_{\mathrm{ext}} \neq \varnothing$ *и для включения* (1) *выполняется «бэнг-бэнг» принцип, то есть справедливо равенство* (24).

***Замечание* 13.** Отметим, что теорема 5 уточняет результаты работ [3], поскольку она не предполагает, что отображение $\Psi\colon C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$ имеет выпуклые образы.

2 Возмущенное включение с внешними возмущениями

Здесь рассматривается включение (1) с внешними возмущениями. Такие возмущения в приложениях имеют место, поскольку они характеризуют погрешность вычислений значений соответствующих многозначных отображений. Как доказывается здесь этими возмущениями нельзя пренебрегать, так как они могут вызвать значительные изменения множества решений возмущенного включения, если отображение $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ не обладает свойством выпуклости значений, то есть когда отображение, порожденное правой частью включения (1), не обладает свойством замкнутости в пространстве $C^n[a,b]$ образов.

Обозначим через $K([a,b] \times [0,\infty))$ множество всех функций $\eta\colon [a,b] \times \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающих свойствами: при каждом $\delta \geqslant 0$ функция $\eta(\cdot,\delta) \in L^1[a,b]$; для каждого $\delta \geqslant 0$ найдется такая функция $\beta_\delta(\cdot) \in L^1[a,b]$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $\tau \in [0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,\tau) \leqslant \beta_\delta(t)$, при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо равенство $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \eta(t,\delta) = = \eta(t,0) = 0$.

Обозначим через $P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ множество всех непрерывных функций $\omega\colon C^n[a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, для которых для любого $x \in C^n[a,b]$ справедливо соотношение $\omega(x,0) = 0$ и любых $(x,\delta) \in C^n[a,b] \times (0,\infty)$ выполняется неравенство $\omega(x,\delta) > 0$.

Рассмотрим отображение $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающее отображение $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$. Будем предполагать, что при почти всех $t \in [a,b]$ отображение $\Delta(t,\cdot)$ непрерывно на $C^n[a,b]$.

Как было отмечено выше, для оператора Немыцкого $\mathcal{N}\colon C^n[a,b] \to \to \Pi[L^n[a,b]]$, порожденного функцией $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, удовлетворяющей условиям Каратеодори, отображение $\Delta_1\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ имеет вид $\Delta_1(t,x) = F(t,x(t))$. Поэтому отображение $\Delta_1(\cdot,\cdot)$ при почти всех $t \in [a,b]$ непрерывно на $C^n[a,b]$.

Пусть функция $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^1$ измерима по Лебегу, а функция $w\colon \mathbb{R}^1 \setminus [a,b] \to \to \mathbb{R}^n$ ограничена и измерима по Борелю. Определим оператор $\Theta\colon C^n[a,b] \to \to L^n[a,b]$ равенством

$$(\Theta x)(t) = \begin{cases} x[v(t)], & \text{если} \quad v(t) \in [a,b], \\ w[v(t)], & \text{если} \quad v(t) \notin [a,b]. \end{cases}$$

Тогда для произведения $\mathcal{N}\Theta\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ отображение $\Delta_2\colon [a,b] \times \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ имеет вид

$$\Delta_2(t,x) = F(t,(\Theta x)(t)).$$

Следовательно, отображение $\Delta_2(\cdot,\cdot)$ при почти всех $t \in [a,b]$ непрерывно на $C^n[a,b]$. Таким образом, класс отображений $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, для которых порождающие их отображения $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ при почти всех $t \in [a,b]$ непрерывны на $C^n[a,b]$, широк.

Рассмотрим оператор $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ и порождающее его отображение $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$. Значения отображения $\Delta(\cdot,\cdot)$, а следовательно, и образы оператора $\Phi(\cdot)$, могут вычисляться с некоторой степенью точности, которую можно задать функцией $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$. В связи с этим рассмотрим отображение $\Delta_\eta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, заданное равенством

$$\Delta_\eta(t,x,\delta) = (\Delta(t,x))^{\eta(t,\delta)}, \tag{25}$$

где функция $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$ в каждой точке $(t,x) \in [a,b] \times C^n[a,b]$ при каждом фиксированном $\delta \in [0,\infty)$ определяет погрешность вычисления значения порождающего отображения $\Delta(\cdot,\cdot)$, причем эти погрешности равномерны относительно переменной $x \in C^n[a,b]$. Далее, функцию $\eta(\cdot,\cdot)$ будем называть *радиусом внешних возмущений, порождающего отображения* $\Delta(\cdot,\cdot)$, или просто радиусом внешних возмущений.

Заметим, что из (25) при всех $(t,x) \in [a,b] \times C^n[a,b]$ вытекает равенство

$$h[\Delta(t,x);\, \Delta_\eta(t,x,\delta)] = \eta(t,\delta). \tag{26}$$

Таким образом, из соотношения (26) вытекает, что для каждой функции $\eta(\cdot,\cdot) \in \in K([a,b]\times[0,\infty))$ при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $x\in C^n[a,b]$ справедливо соотношение

$$\lim_{\delta\to 0+0} h\,[\Delta(t,x);\Delta_\eta(t,x,\delta)] = 0. \tag{27}$$

Поэтому все отображения $\Delta_\eta\colon [a,b]\times C^n[a,b]\times[0,\infty)\to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенные равенством (25) и зависящие от радиуса внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$, близки (в смысле равенства (27)) к отображению $\Delta\colon [a,b]\times C^n[a,b]\to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$. Это приближение будем называть *поточечной аппроксимацией вложением порождающего отображения* $\Delta(\cdot,\cdot)$. Само отображение $\Delta_\eta\colon [a,b]\times C^n[a,b]\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ будем называть *аппроксимирующим оператор* $\Delta(\cdot,\cdot)$ *вложением*. Иногда для краткости в приведенных выше определениях слова «вложением, порождающего отображения $\Delta(\cdot,\cdot)$» будем опускать.

Далее, определим отображение $\Phi_\eta\colon C^n[a,b]\times[0,\infty)\to \Pi[L^n[a,b]]$, заданное соотношением

$$\Phi_\eta(x,\delta) = S\,(\Delta_\eta(\cdot,x,\delta)). \tag{28}$$

Из равенств (28), (26) для любого $x\in C^n[a,b]$ вытекает соотношение

$$h_{L^n[a,b]}[\Phi_\eta(x,\delta);\Phi(x)] = \int_a^b \eta(t,\delta)\,dt\,. \tag{29}$$

Поэтому из (29) и теоремы Лебега следует равенство

$$\lim_{\delta\to 0+0} h_{L^n[a,b]}[\Phi_\eta(x,\delta);\Phi(x)] = 0. \tag{30}$$

Таким образом, все отображения $\Phi_\eta\colon C^n[a,b]\times[0,\infty)\to\Pi[L^n[a,b]]$ имеющие вид (28) и зависящие от радиуса внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$ близки (в смысле равенства (30)) к отображению $\Phi\colon C^n[a,b]\to\Pi[L^n[a,b]]$. Это приближение оператора $\Phi(\cdot)$ будем называть *аппроксимацией вложением в среднем* или просто аппроксимацией в среднем. Само отображение $\Phi_\eta\colon C^n[a,b]\times[0,\infty)\to \to\Pi[L^n[a,b]]$ будем называть *аппроксимирующим оператор* $\Phi(\cdot)$ *вложением* или просто аппроксимирующим. Таким образом, из поточечной аппроксимации отображения $\Delta(\cdot,\cdot)$, порождающего оператор $\Phi(\cdot)$, вытекает аппроксимация отображения $\Phi(\cdot)$ в среднем.

Лемма 4. *Пусть X – нормированное пространство, $U\subset X$ – выпуклое множество. Тогда для любых $x_1,x_2\in U$ справедливо неравенство*

$$h_X[B_X[x_1,r_1]\cap U;\; B_X[x_2,r_2]\cap U] \leqslant \|x_1-x_2\|_X + |r_2-r_1|. \tag{31}$$

Следствие 3. *Пусть X – нормированное пространство. Тогда для любых $x_1,x_2\in X$ и всех $r_1,r_2>0$ справедлива оценка*

$$h_X[B_X[x_1,r_1];B_X[x_2,r_2]] \leqslant \|x_2-x_1\|_X + |r_2-r_1|. \tag{32}$$

***Замечание* 14.** Очевидно, что неравенства (31), (32) остаются справедливы и в случае, когда в левых частях этих неравенств будут стоять различные замыкания множеств.

Пусть $U \subset C^n[a,b]$ – выпуклое замкнутое множество и пусть $\omega(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$. Рассмотрим многозначное отображение $M_U(\omega)\colon U \times [0,\infty) \to \Omega(U)$, определенное равенством

$$M_U(\omega)(x,\delta) = \overline{B_{C^n[a,b]}[x,\omega(x,\delta)]} \cap U. \tag{33}$$

Из неравенства (31) вытекает

Лемма 5. *Пусть $U \subset C^n[a,b]$ – выпуклое замкнутое множество и пусть $\omega(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$. Тогда многозначное отображение $M_U(\omega)\colon U \times [0,\infty) \to \Omega(U)$, заданное соотношением* (33)*, непрерывно по Хаусдорфу.*

Определим отображение $\varphi_U(\omega)\colon [a,b] \times U \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ соотношением

$$\varphi_U(\omega)(t,x,\delta) = \sup_{y \in M_U(\omega)(x,\delta)} h[\Delta(t,x);\Delta(t,y)], \tag{34}$$

где отображение $M_U(\omega)\colon U \times [0,\infty) \to \Omega(U)$ задано равенством (33), а $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ – отображение, порождающее оператор $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$.

Значение функции $\varphi_U(\omega)(\cdot,\cdot,\cdot)$ в точке $(t,x,\delta) \in [a,b] \times U \times [0,\infty)$, на наш взгляд, естественно назвать *модулем непрерывности отображения* $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ в точке (t,x) по переменной x на множестве U, функцию $\omega(\cdot,\cdot)$ – *функцией радиуса модуля непрерывности отображения* или просто радиусом непрерывности, а саму функцию $\varphi_U(\omega)(\cdot,\cdot,\cdot)$ – *функцией модуля непрерывности* или просто модулем непрерывности отображения $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ на множестве U относительно радиуса непрерывности $\omega(\cdot,\cdot)$.

Лемма 6. *Пусть U – непустое, выпуклое, компактное множество пространства $C^n[a,b]$ и пусть $\omega(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty)$. Далее, пусть отображение $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающее оператор $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ при почти всех $t \in [a,b]$ непрерывно на U и пусть существует такая суммируемая функция $\beta_U\colon [a,b] \to [0,\infty)$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x \in U$ справедливо неравенство $\|\Delta(t,x)\| \leqslant \beta_U(t)$. Тогда отображение $\varphi_U(\omega)\colon [a,b] \times U \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, заданное равенством* (34)*, обладает свойствами: для любых $(x,\delta) \in U \times [0,\infty)$ функция $\varphi_U(\omega)(\cdot,x,\delta)$ измерима; для почти всех $t \in [a,b]$ отображение $\varphi_U(t,\cdot,\cdot)$ непрерывно на $U \times [0,\infty)$; для любого $x \in U$ при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется соотношение*

$$\lim_{\substack{z \to x \\ \delta \to 0+0}} \varphi_U(\omega)(t,z,\delta) = 0;$$

существует такая суммируемая функция $p_U\colon [a,b] \to [0,\infty)$, что при почти всех $t \in [a,b]$ для любого $x \in U$ и для любого $\delta \in [0,\infty)$ справедлива оценка $\varphi_U(\omega)(t,x,\delta) \leqslant p_U(t)$.

Пусть $U \subset C^n[a,b]$. Будем говорить, что функция $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$ равномерно на множестве $U \subset C^n[a,b]$ оценивает сверху относительно радиуса непрерывности $\omega(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ модуль непрерывности отображения $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающее оператор $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in U$ и $\delta \in (0,\delta(\varepsilon)]$ выполняется неравенство

$$\varphi_U(\omega)(t,x,\delta) \leqslant \eta(t,\varepsilon),$$

где отображение $\varphi_U : [a, b] \times U \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ определено соотношением (34).

Пусть $U \subset C^n[a, b]$ и пусть $\omega(\cdot, \cdot) \in P(C^n[a, b] \times [0, \infty))$. Определим функцию $\lambda_U(\omega) : [a, b] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ соотношением

$$\lambda_U(\omega) = \sup_{x \in U} \varphi_U(\omega)(t, x, \delta). \tag{35}$$

Из леммы 6 вытекает

Следствие 4. *Пусть U – непустое, выпуклое, компактное множество пространства $C^n[a, b]$, $\omega(\cdot, \cdot) \in P(C^n[a, b] \times [0, \infty))$. Далее, пусть отображение $\Delta : [a, b] \times C^n[a, b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающее оператор $\Phi : C^n[a, b] \to \to \Pi[L^n[a, b]]$ при почти всех $t \in [a, b]$ непрерывно на $C^n[a, b]$ и пусть существует такая суммируемая функция $\beta_U : [a, b] \to [0, \infty)$, что при почти всех $t \in \in [a, b]$ и любых $x \in U$ справедливо неравенство $\|\Delta(t, x)\| \leqslant \beta_U(t)$. Тогда функция $\lambda_U(\omega) : [a, b] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, определенная равенством* (35)*, принадлежит множеству $K([a, b] \times [0, \infty))$ и равномерно на множестве $U \subset C^n[a, b]$ оценивает сверху относительно радиуса непрерывности $\omega(\cdot, \cdot) \in P(C^n[a, b] \times [0, \infty))$, модуль непрерывности отображения $\Delta(\cdot, \cdot)$.*

***Замечание* 15.** Следствие 4 устанавливает, что если U – непустое, выпуклое, компактное множество пространства $C^n[a, b]$, то найдется хотя бы одна функция $\eta(\cdot, \cdot) \in K([a, b] \times [0, \infty))$, которая равномерно на множестве U оценивает сверху относительно фиксированного радиуса непрерывности $\omega(\cdot, \cdot) \in P(C^n[a, b] \times \times [0, \infty))$ модуль непрерывности отображения $\Delta : [a, b] \times C^n[a, b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающее оператор $\Phi : C^n[a, b] \to \Pi[L^n[a, b]]$, если при этом при почти всех $t \in [a, b]$ отображение $\Delta(t, \cdot)$ непрерывно на U.

***Замечание* 16.** Как было отмечено ранее для оператора Немыцкого $\mathcal{N} : C^n[a, b] \to \Pi[L^n[a, b]]$, порождающее его отображение $\Delta_1 : [a, b] \times C^n[a, b] \to \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ можно рассматривать на произведении $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ (это сужение здесь обозначается как отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$). Так как $\mathbb{R}^n \subset C^n[a, b]$ (каждый элемент пространства $\mathbb{R}^n$ рассматривается как постоянная функция), то функцию $\varphi_U(\omega) : [a, b] \times U \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, определенную равенством (34), можно задать на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ с помощью соотношения

$$\varphi(\omega)(t, x, \delta) = \max_{\overline{y \in B[x, \omega(x, \delta)]}} h[F(t, x); F(t, y)]. \tag{36}$$

При этом функция $\varphi(\omega) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, определенная равенством (36), удовлетворяет утверждению леммы 6 на любом ограниченном множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Поэтому в этом случае следствие 4, которое гарантирует существование хотя бы одной функции $\eta(\cdot, \cdot) \in K([a, b] \times [0, \infty))$ равномерно на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ оценивающей сверху относительно фиксированного радиуса непрерывности $\omega(\cdot, \cdot) \in P(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ модуль непрерывности отображения $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающее оператор Немыцкого $\mathcal{N} : C^n[a, b] \to \Pi[L^n[a, b]]$, можно уточнить. Следствие 4 в этом случае остается справедливым без предположения выпуклости множества $U \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $\eta(\cdot, \cdot) \in K([a, b] \times [0, \infty))$ и $\xi(\cdot, \cdot) \in P(C^n[a, b] \times [0, \infty))$ рассмотрим в пространстве $C^n[a, b]$ для каждого $\delta > 0$ включение

$$x \in (\Psi(x))^{\xi(x, \delta)} + V\Phi_\eta(x, \delta), \tag{37}$$

где отображение $\Phi_\eta : C^n[a, b] \times [0, \infty) \to \Pi[L^n[a, b]]$ задано соотношениями (25), (28). Включение (37) будем изучать во взаимосвязи с включениями (1) и (17).

Каждое решение включения (37) при фиксированном $\delta > 0$ будем называть δ*-решением включения* (1). Обозначим через $H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)$ множество всех δ-решений включения (1), принадлежащих множеству $U \subset C^n[a,b]$. Обозначим множества решений включений (1), (17), принадлежащих множеству $U \subset C^n[a,b]$, через $H(U)$, $H_{\text{co}}(U)$, соответственно.

Теорема 7. *Пусть* U *– непустое замкнутое множество пространства* $C^n[a,b]$ *и* $\xi(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$. *Тогда для любой функции* $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$, *равномерно на множестве* $U \subset C^n[a,b]$ *оценивающей сверху относительно радиуса непрерывности* $\omega(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ *модуль непрерывности отображения* $\Delta\colon [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, *порождающее оператор* $\Phi\colon C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, *справедливо равенство*

$$H_{\text{co}}(U) = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)},$$

где $\overline{H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)}$ *– замыкание множества* $H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)$ *в пространстве* $C^n[a,b]$.

Замечание **17.** Отметим, что дифференциальные включения являются частным случаем возмущенных включений. А так как для дифференциального включения равенство $\overline{H(U)} = H_{\text{co}}(U)$ может не выполняться [9, 27], то из теоремы 6 (см. следствие 4 и замечание 12) следует, что соотношение

$$\overline{\bigcap_{\delta>0} H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)}$$

может при некоторых $(\eta(\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot)) \in K([a,b] \times [0,\infty)) \times P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ не иметь места.

Пусть $U \subset C^n[a,b]$. По аналогии с [10, 20, 21, 23] будем говорить, что для включения (1) на множестве $U \subset C^n[a,b]$ выполняется принцип плотности (условие плотности), если справедливо равенство

$$\overline{H(U)} = H_{\text{co}}(U). \tag{38}$$

Замечание **18.** Как было отмечено выше принцип плотности не всегда выполняется. Это доказывает пример Плиса [27]. Первые достаточные условия, когда выполняется равенство (38), для задачи Коши дифференциального включения получены А.Ф. Филипповым [8, 9], а для периодических решений и для краевых задач эти условия получены в работах [3, 4, 6, 11, 19].

Теорема 8. *Пусть* $\xi(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$. *Если* U *– непустое замкнутое множество пространства* $C^n[a,b]$, *то для выполнения равенства*

$$\overline{H(U)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)} \tag{39}$$

для любого радиуса внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$ *достаточно, а если* U *– непустое выпуклое компактное множество пространства* $C^n[a,b]$, *то и необходимо выполнение принципа плотности на множестве* $U \subset C^n[a,b]$.

Замечание **19.** Отметим, что выполнение равенства (39) для любых внешних возмущений $(\eta(\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot)) \in K([a,b] \times [0,\infty)) \times P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ является свойством устойчивости множества решений $H(U)$ включения (1) относительно этих возмущений [10, 20].

Следствие 5. *Пусть отображения* $V: L^n[a,b] \to C^n[a,b]$, $\Psi: C^n[a,b] \to \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$, $\Phi: C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *обладают свойством* B. *Тогда для любых* $(\eta(\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot)) \in K([a,b] \times [0,\infty)) \times P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ *выполняется равенство* (39) *на множестве* $U = C^n[a,b]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №01-01-00140; №04-01-00324), Министерства Образования РФ (грант №Е02-1.0-212)

Список литературы

1. Булгаков А.И. Некоторые результаты по теории возмущений многозначных операторов с выпуклыми замкнутыми значениями отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и их приложения / А.И. Булгаков, Л.И. Ткач // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 1997. Т. 2. Вып. 2. С. 111–120.

2. Булгаков А.И. Асимптотическое представление множеств δ-решений включения типа Гаммерштейна / А.И. Булгаков, Л.И. Ткач // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 1997. Т. 2. Вып. 3. С. 294–298.

3. Булгаков А.И. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений / А.И. Булгаков, Л.И. Ткач // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 6. С. 3–32.

4. Булгаков А.И. Возмущение однозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами / А.И. Булгаков, Л.И. Ткач // Изв. вузов. Мат. 1999. № 3. С. 3–16.

5. Иоффе А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. М.: Наука, 1974. 480 с.

6. Булгаков А.И. Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения I, II, III / А.И. Булгаков // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С.371–379; Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 4. С.566–571; Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С.739–746.

7. Благодатских В.И. Дифференциальные включения и оптимальное управление / В.И. Благодатских, А.Ф. Филиппов // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.

8. Филиппов А.Ф. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью / А.Ф. Филиппов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1967. № 3. С. 16–26.

9. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. М.: Наука, 1985.

10. Булгаков А.И. Аппроксимация дифференциальных включений / А.И. Булгаков, В.В. Скоморохов // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 2. С. 35–52.

11. Булгаков А.И. Интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения к краевым задачам дифференциальных включений / А.И. Булгаков // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 10. С. 63–86.

12. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве / А.А. Толстоногов. Новосибирск: Наука, 1986. 296 с.

13. Булгаков А.И. Некоторые свойства множества решений интегрального включения Вольтерра – Гаммерштейна / А.И. Булгаков, Л.Н. Ляпин // Дифференц.

уранения. 1978. Т. 14. № 8. С. 1465–1472.

14. Суслов С.И. Нелинейный бэнг-бэнг принцип I. Конечномерный случай / С.И. Суслов. Новосибирск, 1989. С. 14. (Препр. / АН СССР СО Ин-т мат.; № 11).

15. Суслов С.И. Нелинейный бэнг-бэнг принцип II. Бесконечномерный случай / С.И. Суслов. Новосибирск, 1989. С. 18. (Препр. / АН СССР СО Ин-т мат.; №12).

16. Толстоногов А.А. О множестве решений дифференциального включения в банаховом пространстве / А.А. Толстоногов, П.И. Чугунов // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. № 6. С. 144–159.

17. Толстоногов А.А. О решениях дифференциального включения с полунепрерывной снизу невыпуклой правой частью в банаховом пространстве / А.А. Толстоногов, И.А. Финогенко // Матем. сб. 1984. Т. 125. № 2. С. 199–230.

18. Чугунов П.И. Свойства решений дифференциальных включений и управляемые системы / П.И. Чугунов // Прикл. матем. и пакеты прикл. программ / СЭИСО АН СССР. Иркутск, 1980. С. 155–179.

19. Ирисов А.Е. О замыкании множества периодических решений дифференциального включения / А.Е. Ирисов, Е.Л. Тонков // Дифференц. и интеграл. уравнения / ГГУ. Горький, 1983. С. 32–38.

20. Булгаков А.И. К вопросу устойчивости дифференциальных включений / А.И. Булгаков, А.А. Ефремов, Е.А. Панасенко // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 1999. Т. 4, вып. 4. С. 461–470.

21. Булгаков А.И. Обыкновенные дифференциальные включения с внутренними и внешними возмущениями / А.И. Булгаков, А.А. Ефремов, Е.А. Панасенко // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1587–1598.

22. Булгаков А.И. Возмущенные включения с компактнозначным отображением / А.И. Булгаков, А.А. Григоренко, Е.С. Жуковский // Вестн. УдГУ. Матем., мех. Ижевск, 2000, № 1. С. 33–40.

23. Булгаков А.И. Приближенные решения дифференциального включения с невыпуклой правой частью / А.И. Булгаков, Н.П. Пучков, В.В. Скоморохов // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2002. Т. 7. Вып. 1. С. 104–105.

24. Michal E.A. Continuous Selection. I. / Michal E.A. // Ann. Math. 1956. V. 63, № 2. P. 361–381.

25. Wazewski T. Sur une generalisation de la notion des solutions d'une equation au contingent / Wazewski T. // Bull. Acad. Pol. Sci. ser. Sei. Math. Astron. Phys. 1962. V. 10. № 1. P. 11–15.

26. Fryszkowski A. Continuous Selection for a Class of Non-Convex Multivalued Maps / Fryszkowski A. // Studia. math. 1983. V. 76. № 2. P. 163–174.

27. Plis A. Traejectories and Quasitrajectories of an Orientor Field / Plis A. // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. math. Astron. Phys. 1963. V. 11. № 6. P. 369–370.

28. Bressan A. On a Bang-Bang Principle for Nonlinear Systems / Bressan A. // Boll. Unione Math. Italiana, suppl. 1980. V. 1. P. 53–59.

29. Hermes H. On Continuous and Measurable Selections and the Existence of Solutions of Generalized Differential Equations / Hermes H. // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 29. № 3. P. 535–542.

30. Pianigiani G. On the Fundamental Theory of Multivalued Differential Equations / Pianigiani G. // J. Different. Equations. 1977. V. 25. № 1. P. 30–38.

To Some Problems of Disturbed Inclusions and their Applications to Differential Inclusions
Part 1

A.I. Bulgakov[2], N.P. Puchkov[1], V.V. Skomorokhov[1], A.A. Grigorenko[2], O.P. Belyaeva[2]

Departments: "Higher Mathematics" TSTU (1);
"Algebra and geometry" TSU after G.R. Derzhavin (2)

Key words and phrases: approximation of mapping; differential inclusions; disturbed inclusions; functional inclusions; multi-valued mapping.

Abstract: The paper deals with inclusion, the right part of which consists of the algebraic sum of values of "good" (having closed images) and "bad" (without property of closeness and convexity of values) of multi-valued mappings. Such inclusions are called disturbed. The first part of the paper formulates basic theories of such inclusions and proves that collection of solutions for such inclusions can lose the property of stability ("insignificant" changes of the first part can lead to significant changes in the collection of solutions). The necessary and sufficient condition to provide the property of stability of the solutions collection is formulated.

Über einige Aufgaben der empörten Einschaltungen und ihre Anwendungen zu den Differentialeinschaltungen
Teil 1

Zusammenfassung: In der Arbeit wird die Einschaltung studiert, dessen rechte Teil aus der algebraischen Summe der Bedeutungen "gut" (hat die geschlossenen Weisen) und "schlecht" (hat keine Eigenschaft der Verschlossenheit und der Konvexität der Bedeutungen) der bedeutungsvollen Abbilder besteht. Solche Einschaltungen bezeichnet man als empört. In den ersten Teil des Artikels sind die Grundlagen der Theorie solcher Einschaltungen abgefasst, wobei ist hier bewiesen, daß die Menge der Beschlüße solcher Einschaltungen die Eigenschaft der Stabilität verlieren kann (die „kleinen" Veränderungen des rechten Teiles können zur wesentlichen Veränderung der Menge der Beschlüße führen). Es ist die notwendige und ausreichende Bedingung abgefasst, wenn die Eigenschaft der Stabilität der Menge der Beschlüße erledigt wird.

Sur quelques problèmes des inclusions perturbées et ses applications vers les inclusions différentionnelles
1-ère partie

Résumé: On étudie l'inclusion dont la partie droite se compose de la somme algébrique dans les valeurs de "bien" (ayant les images fermées) et de "mal" (n'ayant pas de propriété de la ferméture et de la convexivité des valeurs) de multiples réflexions. De telles inclusions sont nommées perturbées. Dans la première partie de l'article sont formulées les bases de la théorie de telles inclusions et l'on a prouvé que de multiples résolutions des inclusions peuvent perdre la propriété de la stabilité (de "petits" changements de la partie droite peuvent aboutir au changement important de multiples résolutions). On a formulé la condition nécessaire et suffisante lorsqu' on effectue la propriété de la stabilité de multiples résolutions.