

УДК 539.3

**КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ
С ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ.
2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ПОСТАНОВКА**

Г.М. Куликов, С.В. Плотникова

Кафедра «Прикладная математика и механика», ТГТУ

Ключевые слова и фразы: геометрически нелинейная контактная задача; модифицированный метод множителей Лагранжа; пластина типа Тимошенко; смешанный метод конечных элементов.

Аннотация: Рассмотрена задача контактного взаимодействия упругой пластины типа Тимошенко, подверженной произвольно большим перемещениям и поворотам, с абсолютно жестким штампом. Разработан алгоритм численного решения контактной задачи на основе смешанного метода конечных элементов с использованием модифицированного метода множителей Лагранжа. В качестве искомых функций выбираются 6 перемещений лицевых плоскостей пластины, что позволяет упростить постановку контактных задач, поскольку с помощью этих перемещений формулируются условия непроникания контактирующих тел, и получить соотношения для компонент тензора деформаций Грина-Лагранжа, точно представляющие произвольно большие перемещения пластины как жесткого тела.

1 Постановка задачи

В [1] рассмотрена задача контактного взаимодействия геометрически линейной пластины типа Тимошенко с абсолютно жестким штампом и разработан алгоритм численного решения задачи на основе смешанного метода конечных элементов (МКЭ) с использованием модифицированного метода множителей Лагранжа. Здесь на основе теории упругих пластин типа Тимошенко, подверженных произвольно большим перемещениям и произвольно большим поворотам [2], разработан более общий алгоритм численного решения контактной задачи с использованием смешанных конечно-элементных аппроксимаций [3].

Как и в работе [1], в качестве искомых функций выбраны 6 перемещений лицевых плоскостей пластины. Это позволяет, во-первых, упростить формулировку контактных задач, так как в качестве искомых функций выбираются функции, с помощью которых формулируются условия непроникания контактирующих тел; и, во-вторых, разработать эффективные смешанные элементы пластины типа Тимошенко с точки зрения точного представления произвольно больших перемещений пластины как жесткого целого [4].

Рассмотрим пластину постоянной толщины h , ограниченную лицевыми плоскостями S^- и S^+ , расположенными на расстояниях δ^- и δ^+ от отсчетной

плоскости S , соответственно, и боковой поверхностью Ω , перпендикулярной к S (рис. 1). Отнесем плоскость S к системе декартовых координат x_1, x_2 ; поперечную координату x_3 направим по направлению нормали к S . Пусть \bar{S} – срединная плоскость пластины; $\bar{\Gamma} = \bar{S} \cap \Omega$ – граничный контур; \mathbf{e}_i – базисные векторы декартовой системы координат x_i ; p_i^\pm – внешние поверхностные нагрузки, действующие на лицевых поверхностях S^\pm ; $\mathbf{q} = q_\nu \mathbf{v} + q_t \mathbf{t} + q_3 \mathbf{e}_3$ – вектор внешних поверхностных нагрузок, действующих на боковой поверхности Ω ; \mathbf{v}, \mathbf{t} – нормальный и тангенциальный единичные векторы к граничному контуру $\bar{\Gamma}$; u_i – компоненты вектора перемещений; ε_{ij}^u – компоненты тензора деформаций Грина-Лагранжа; S_{ij} – компоненты симметричного тензора Пиола-Кирхгофа. Здесь и далее латинские индексы $i, j, \ell, m = 1, 2, 3$; а греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$.

Воспользуемся кинематической гипотезой Тимошенко о линейном распределении перемещений по толщине пластины в виде [5, 6]:

$$\mathbf{u} = N^-(x_3) \mathbf{v}^- + N^+(x_3) \mathbf{v}^+, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v}^\pm = \sum_i v_i^\pm \mathbf{e}_i, \quad (1.2)$$

где \mathbf{v}^\pm – векторы перемещений лицевых плоскостей S^\pm ; $v_i^\pm(x_1, x_2)$ – компоненты этих векторов; $N^\pm(x_3)$ – линейные функции формы пластины:

$$N^-(x_3) = \frac{1}{h}(\delta^+ - x_3), \quad N^+(x_3) = \frac{1}{h}(x_3 - \delta^-). \quad (1.3)$$

Вводя перемещения (1.1), (1.2) в деформационные соотношения геометрически нелинейной теории упругости [7], приходим к деформационным соотношениям теории пластин типа Тимошенко [4]:

$$\varepsilon_{\alpha i}^u = N^-(x_3) \mathcal{E}_{\alpha i}^- + N^+(x_3) \mathcal{E}_{\alpha i}^+, \quad \varepsilon_{33}^u = \mathcal{E}_{33}, \quad (1.4)$$

где $\mathcal{E}_{\alpha\beta}^\pm$ и $\mathcal{E}_{\alpha 3}^\pm$ – тангенциальные и поперечные касательные деформации лицевых плоскостей пластины S^\pm ; \mathcal{E}_{33} – поперечное обжатие, определяемые по формулам:

$$2\mathcal{E}_{\alpha\beta}^\pm = \mathbf{v}_{,\alpha}^\pm \mathbf{e}_\beta + \mathbf{v}_{,\beta}^\pm \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{v}_{,\alpha}^\pm \mathbf{v}_{,\beta}^\pm, \quad 2\mathcal{E}_{\alpha 3}^\pm = \boldsymbol{\beta} \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{v}_{,\alpha}^\pm \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\beta} \mathbf{v}_{,\alpha}^\pm, \quad (1.5)$$

$$\mathcal{E}_{33} = \boldsymbol{\beta} \left(\varepsilon_3 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta} \right), \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{h} (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-).$$

Здесь нижний индекс α , следующий после запятой, означает частное дифференцирование по координате x_α .

Деформационные соотношения (1.4), (1.5) являются весьма привлекательными с точки зрения их использования в МКЭ, поскольку они точно представляют произвольно большие перемещения пластины как жесткого тела. Действитель-

но, перемещения лицевых плоскостей пластины как жесткого целого [8] можно представить в виде

$$\mathbf{v}^{\pm R} = \mathbf{\Delta} + \mathbf{\Phi} \mathbf{R}^{\pm} - \mathbf{R}^{\pm}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{\Delta} = \sum_i \Delta_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{R}^{\pm} = \sum_{\alpha} x_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} + \delta^{\pm} \mathbf{e}_3.$$

Здесь $\mathbf{\Delta}$ – вектор поступательного перемещения пластины; \mathbf{R}^{\pm} – радиус-векторы точек лицевых плоскостей S^{\pm} ; $\mathbf{\Phi}$ – ортогональная матрица, характеризующая вращение пластины как жесткого целого вокруг точки 0 (рис. 1)

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

где φ , θ , ψ – углы Эйлера-Крылова. Для производных векторов жестких перемещений (1.6) с учетом представления (1.7) нетрудно получить формулу

$$\mathbf{v}_{,\alpha}^{\pm R} = \mathbf{\Phi} \mathbf{e}_{\alpha} - \mathbf{e}_{\alpha}. \quad (1.8)$$

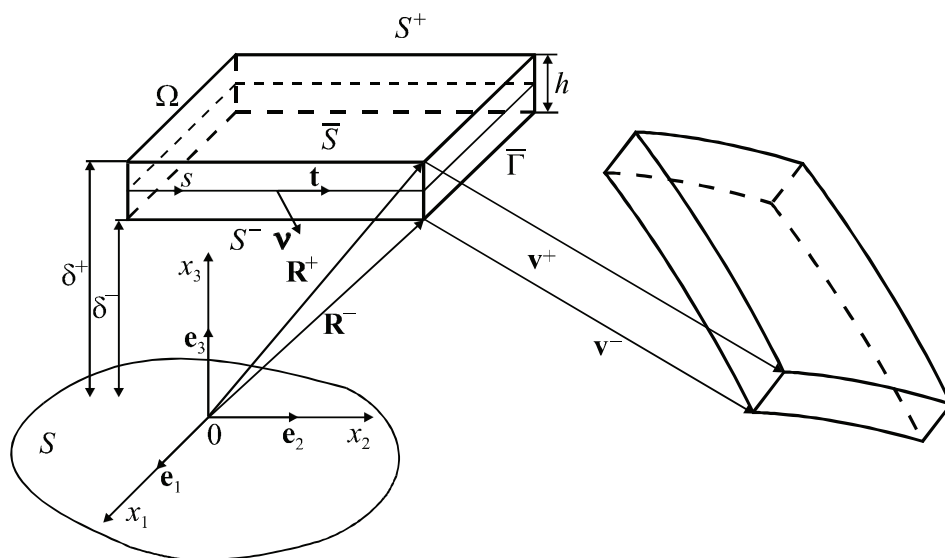


Рис. 1 Геометрия пластины

Вводя далее (1.6), (1.8) в деформационные соотношения (1.5) и учитывая свойство ортогонального преобразования сохранять скалярное произведение векторов, получим

$$2\varepsilon_{ij}^{uR} = (\mathbf{\Phi} \mathbf{e}_i) (\mathbf{\Phi} \mathbf{e}_j) - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0,$$

что и требовалось доказать.

В целях использования деформационных соотношений (1.5) в алгоритме численного решения контактных задач представим их в скалярной форме

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm} = e_{\alpha\beta}^{\pm} + \eta_{\alpha\beta}^{\pm}, \quad \varepsilon_{\alpha 3}^{\pm} = e_{\alpha 3}^{\pm} + \eta_{\alpha 3}^{\pm}, \quad \varepsilon_{33} = e_{33} + \eta_{33}, \quad (1.9)$$

$$2e_{\alpha\beta}^{\pm} = v_{\alpha,\beta}^{\pm} + v_{\beta,\alpha}^{\pm}, \quad 2e_{\alpha 3}^{\pm} = \beta_{\alpha} + v_{3,\alpha}^{\pm}, \quad e_{33} = \beta_3,$$

$$2\eta_{\alpha\beta}^{\pm} = \sum_i v_{i,\alpha}^{\pm} v_{i,\beta}^{\pm}, \quad 2\eta_{\alpha 3}^{\pm} = \sum_i \beta_i v_{i,\alpha}^{\pm}, \quad 2\eta_{33} = \sum_i \beta_i^2,$$

$$\beta_i = \frac{1}{h} (v_i^+ - v_i^-).$$

2 Смешанное вариационное уравнение для упругой пластины типа Тимошенко

Вариационный принцип Ху-Васидзу [9] для упругой пластины, подверженной конечным деформациям, может быть записан в виде

$$\begin{aligned} & \iint_{\bar{S}} \int_{\delta^-}^{\delta^+} \sum_{i,j} \left[\left(S_{ij} - \sum_{\ell,m} b_{ij\ell m} \varepsilon_{\ell m} \right) \delta \varepsilon_{ij} + (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^u) \delta S_{ij} - S_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^u \right] dx_3 dS + \\ & + \iint_{S^+} \sum_i p_i^+ \delta u_i dS - \iint_{S^-} \sum_i p_i^- \delta u_i dS + \oint_{\bar{\Gamma}} \int_{\delta^-}^{\delta^+} (q_v \delta u_v + q_t \delta u_t + q_3 \delta u_3) dx_3 ds = 0, \quad (2.1) \end{aligned}$$

где u_v, u_t, u_3 – компоненты вектора перемещений в локальном базисе $\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{e}_3$, связанном с граничным контуром $\bar{\Gamma}$ (см. рис. 1); $b_{ij\ell m}$ – компоненты тензора эффективной жесткости; ε_{ij}^u – компоненты тензора деформаций Грина-Лагранжа, вызванных полем перемещений; ε_{ij} – компоненты тензора *независимо* введенных деформаций.

Подставим в смешанное вариационное уравнение (2.1) независимые аппроксимации перемещений (1.1) и деформаций

$$\varepsilon_{\alpha i} = N^-(x_3) E_{\alpha i}^- + N^+(x_3) E_{\alpha i}^+, \quad \varepsilon_{33} = E_{33}, \quad (2.2)$$

где $E_{\alpha\beta}^{\pm}(x_1, x_2)$, $E_{\alpha 3}^{\pm}(x_1, x_2)$ – тангенциальные и поперечные касательные деформации лицевых плоскостей; $E_{33}(x_1, x_2)$ – поперечное обжатие. В результате, учитывая деформационные соотношения (1.4), (1.9) и вводя результирующие напряжения и внешних поверхностных нагрузок

$$T_{\alpha i}^{\pm} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} S_{\alpha i} N^{\pm}(x_3) dx_3, \quad T_{33} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} S_{33} dx_3, \quad (2.3)$$

$$\hat{T}_{v\alpha}^{\pm} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} q_{\alpha} N^{\pm}(x_3) dx_3 \quad (\alpha = v, t, 3),$$

приходим к следующему вариационному уравнению:

$$\delta J_{HW} = 0, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \delta J_{HW} = & \iint_{\bar{S}} \left(\sum_{i+j<6} \left[T_{ij}^- - \sum_{\ell+m<6} \left(D_{ij\ell m}^{00} E_{\ell m}^- + D_{ij\ell m}^{01} E_{\ell m}^+ \right) - \underline{D_{ij33}^- E_{33}} \right] \delta E_{ij}^- + \right. \\ & + \left. \left[T_{ij}^+ - \sum_{\ell+m<6} \left(D_{ij\ell m}^{01} E_{\ell m}^- + D_{ij\ell m}^{11} E_{\ell m}^+ \right) - \underline{D_{ij33}^+ E_{33}} \right] \delta E_{ij}^+ + \left(E_{ij}^- - e_{ij}^- - \eta_{ij}^- \right) \delta T_{ij}^- + \right. \\ & + \left. \left(E_{ij}^+ - e_{ij}^+ - \eta_{ij}^+ \right) \delta T_{ij}^+ - T_{ij}^- \left(\delta e_{ij}^- + \delta \eta_{ij}^- \right) - T_{ij}^+ \left(\delta e_{ij}^+ + \delta \eta_{ij}^+ \right) \right) + \\ & + \left[T_{33} - \sum_{\ell+m<6} \left(D_{33\ell m}^- E_{\ell m}^- + D_{33\ell m}^+ E_{\ell m}^+ \right) - D_{3333} E_{33} \right] \delta E_{33} + \left(E_{33} - e_{33} - \eta_{33} \right) \delta T_{33} - \\ & - T_{33} \left(\delta e_{33} + \delta \eta_{33} \right) + \sum_i \left(p_i^+ \delta v_i^+ - p_i^- \delta v_i^- \right) dx_1 dx_2 + \\ & + \oint_{\bar{\Gamma}} \left(\hat{T}_{vv}^- \delta v_v^- + \hat{T}_{vv}^+ \delta v_v^+ + \hat{T}_{vt}^- \delta v_t^- + \hat{T}_{vt}^+ \delta v_t^+ + \hat{T}_{v3}^- \delta v_3^- + \hat{T}_{v3}^+ \delta v_3^+ \right) ds, \quad (2.5) \end{aligned}$$

где $v_v^\pm, v_t^\pm, v_3^\pm$ – компоненты векторов перемещений лицевых плоскостей S^\pm в локальном базисе $\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{e}_3$; $D_{ij\ell m}^{pq}$ – компоненты тензоров жесткости пластины:

$$D_{ij\ell m}^{pq} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} b_{ij\ell m} \left[N^-(x_3) \right]^{2-p-q} \left[N^+(x_3) \right]^{p+q} dx_3 \quad (p, q = 0, 1), \quad (2.6)$$

$$D_{ij33}^- = D_{ij33}^{00} + D_{ij33}^{01}, \quad D_{ij33}^+ = D_{ij33}^{01} + D_{ij33}^{11}, \quad D_{3333} = D_{3333}^- + D_{3333}^+.$$

При вычислении компонент симметричного тензора напряжений Пиола-Кирхгофа могут быть использованы полные соотношения обобщенного закона Гука

$$S_{ij} = \sum_{\ell, m} b_{ij\ell m} \varepsilon_{\ell m}. \quad (2.7)$$

Однако, при расчете пластин из несжимаемых или близких к ним по характеристикам материалов, у которых коэффициенты Пуассона близки к 0,5 [2, 5], а также с целью преодоления так называемого Пуассоновского заклинивания [3, 4, 10] будем приближенно полагать в (2.7) $b_{\alpha\beta 33} = 0$. Вместе с тем уравнение для поперечного нормального напряжения используется в неизменном виде, т.е. $b_{33\alpha\beta} \neq 0$. Сказанное означает, что согласно (2.6) подчеркнутые члены в вариационном уравнении (2.4), (2.5) следует опустить. В результате приходим к несимметричной матрице жесткости, что, однако, не вносит существенных корректив в численную реализацию контактной задачи.

3 Модифицированное вариационное уравнение для решения геометрически нелинейной контактной задачи

Предположим, что контакт пластины с абсолютно жестким гладким выпуклым штампом осуществляется, как и в [1], по части внешней плоскости $S_c^+ \subset S^+$, причем трение в области контакта отсутствует, т.е. для вектора контактных усилий имеем

$$\mathbf{q}^+ = -q_n^+ \mathbf{n}_b, \quad q_n^+ \leq 0, \quad (3.1)$$

где $q_n^+(x_1, x_2)$ – контактное давление; \mathbf{n}_b – единичный вектор внешней нормали к поверхности штампа (рис. 2).

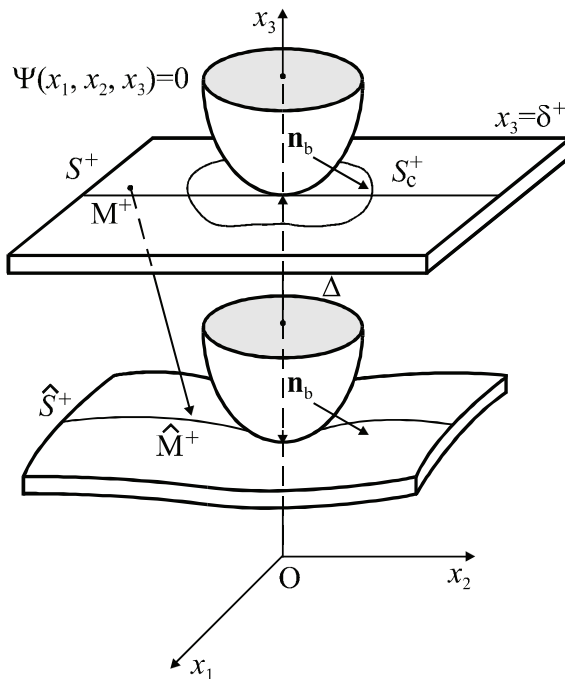


Рис. 2 Взаимодействие пластины с жестким штампом

Пусть поверхность штампа задается уравнением

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (3.2)$$

при этом внутри штампа $\Psi(x_1, x_2, x_3) < 0$, вне его $\Psi(x_1, x_2, x_3) > 0$.

Сдвинем штамп на величину Δ вертикально вниз, тогда уравнение поверхности штампа будет иметь вид

$$\Psi(x_1, x_2, x_3 + \Delta) = 0. \quad (3.3)$$

В результате перемещения штампа точка $M^+(x_1, x_2, \delta^+)$, принадлежащая поверхности предполагаемого контакта S_c^+ , переходит в новое положение $\hat{M}^+(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, где обозначено:

$$\hat{x}_\alpha = x_\alpha + v_\alpha^+, \quad \hat{x}_3 = \delta^+ + v_3^+. \quad (3.4)$$

Учитывая формулы (3.3), (3.4), условие непроникания контактирующих тел можно записать в следующей форме

$$\Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 + \Delta) \geq 0, \quad (3.5)$$

которое для простейшего случая цилиндрического штампа с образующей параллельной оси Ox_1 принимает вид

$$\Psi(x_2, v_2^+, v_3^+) = (x_2 + v_2^+)^2 + (v_3^+ + \Delta - R)^2 - R^2 \geq 0, \quad (3.6)$$

где R – радиус цилиндра.

Неравенства (3.1), (3.5) необходимо дополнить условием того, что контактное давление определяется в точках, которые вступают в контакт с жестким штампом, т.е. должно выполняться равенство

$$q_n^+ \Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 + \Delta) = 0. \quad (3.7)$$

Для решения задачи контактного взаимодействия пластины с жестким штампом в геометрически нелинейной постановке рассмотрим вариационное уравнение (2.4), (2.5), дополнив его слагаемым, отвечающим за выполнение условия непроникания (3.5), и еще одним слагаемым [11], связанным с регуляризацией задачи

$$\delta J_{HW} - \delta \iint_{S_c^+} \left[\lambda \Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 + \Delta) - \frac{1}{2\varepsilon^{\text{reg}}} \lambda^2 \right] dx_1 dx_2 = 0, \quad (3.8)$$

где $\lambda(x_1, x_2)$ – множитель Лагранжа; ε^{reg} – регуляризационный параметр. Заметим, что в случае решения геометрически линейной контактной задачи для пластины и пологого штампа [1], когда контактные усилия \mathbf{q}^+ распределены по недеформированной поверхности S_c^+ в направлении оси Ox_3 , множитель Лагранжа совпадает с контактным давлением, т.е.

$$q_n^+ = \lambda. \quad (3.9)$$

Принципиально иная ситуация возникает при решении геометрически нелинейной задачи для пластины, взаимодействующей с непологим штампом, когда контактные усилия \mathbf{q}^+ распределены согласно (3.1) по деформированной поверхности \hat{S}_c^+ в направлении нормали к поверхности штампа.

Чтобы обобщить формулу (3.9) рассмотрим виртуальную работу, произведенную контактными усилиями,

$$\delta A_c = \iint_{S_c^+} \mathbf{q}^+ \delta \mathbf{v}^+ dx_1 dx_2. \quad (3.10)$$

Этой работе в вариационном уравнении (3.8) отвечает следующий член

$$\delta A_c = - \iint_{S_c^+} \lambda \delta \Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 + \Delta) dx_1 dx_2. \quad (3.11)$$

Далее, учитывая соотношения (3.4), вычисляем вариацию функции Ψ

$$\delta\Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 + \Delta) = \sum_i \frac{\partial\Psi}{\partial v_i^+}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 + \Delta) \delta v_i^+,$$

откуда

$$\delta\Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 + \Delta) = \nabla\Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 + \Delta) \delta\mathbf{v}^+. \quad (3.12)$$

Сопоставляя формулу (3.10) с (3.11) и принимая во внимание (3.12), получим

$$\mathbf{q}^+ = -\lambda |\nabla\Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 + \Delta)| \mathbf{n}_b. \quad (3.13)$$

Сравнивая соотношения (3.1), (3.13), приходим к требуемой формуле для контактного давления

$$q_n^+ = \lambda |\nabla\Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 + \Delta)|. \quad (3.14)$$

В заключение, вариационное уравнение (3.8) запишем в более удобной для численного алгоритма форме

$$\delta J_{HW} - \delta J_c = 0, \quad (3.15)$$

где

$$\delta J_c = \iint_{S_c^+} \left\{ \lambda \nabla\Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 + \Delta) \delta\mathbf{v}^+ + \left[\Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 + \Delta) - \frac{1}{\varepsilon^{\text{reg}}} \lambda \right] \delta\lambda \right\} dx_1 dx_2. \quad (3.16)$$

4 Алгоритм численного решения геометрически нелинейной контактной задачи смешанным МКЭ

Смешанное вариационное уравнение (3.15) для элемента пластины в его локальных координатах ξ_1, ξ_2 , которые изменяются от -1 до 1 , представим с учетом (2.5), (3.16) в матричной форме

$$\delta J_{HW} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(\mathbf{T} - \mathbf{D}\mathbf{E})^T \delta\mathbf{E} + (\mathbf{E} - \mathbf{e} - \boldsymbol{\eta})^T \delta\mathbf{T} - \mathbf{T}^T (\delta\mathbf{e} + \delta\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{P}^T \delta\mathbf{v} \right] d\xi_1 d\xi_2 + \oint_{\Gamma^{el}} \hat{\mathbf{T}}_r^T \delta\mathbf{v}_r ds, \quad (4.1)$$

$$\delta J_c = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \lambda \boldsymbol{\Xi}^T \delta\mathbf{v} + \left[\Psi(\xi_1 + v_1^+, \xi_2 + v_2^+, \delta^+ + \Delta + v_3^+) - \frac{1}{\varepsilon^{\text{reg}}} \lambda \right] \delta\lambda \right\} d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{v} = \left[v_1^- \ v_1^+ \ v_2^- \ v_2^+ \ v_3^- \ v_3^+ \right]^T, \quad \mathbf{v}_r = \left[v_v^- \ v_v^+ \ v_t^- \ v_t^+ \ v_3^- \ v_3^+ \right]^T,$$

$$\mathbf{E} = \left[E_{11}^- \ E_{11}^+ \ E_{22}^- \ E_{22}^+ \ 2E_{12}^- \ 2E_{12}^+ \ 2E_{13}^- \ 2E_{13}^+ \ 2E_{23}^- \ 2E_{23}^+ \ E_{33} \right]^T,$$

$$\mathbf{e} = \left[e_{11}^- \ e_{11}^+ \ e_{22}^- \ e_{22}^+ \ 2e_{12}^- \ 2e_{12}^+ \ 2e_{13}^- \ 2e_{13}^+ \ 2e_{23}^- \ 2e_{23}^+ \ e_{33} \right]^T,$$

$$\boldsymbol{\eta} = \left[\eta_{11}^- \quad \eta_{11}^+ \quad \eta_{22}^- \quad \eta_{22}^+ \quad 2\eta_{12}^- \quad 2\eta_{12}^+ \quad 2\eta_{13}^- \quad 2\eta_{13}^+ \quad 2\eta_{23}^- \quad 2\eta_{23}^+ \quad \eta_{33}^- \quad \eta_{33}^+ \right]^T,$$

$$\mathbf{T} = \left[T_{11}^- \quad T_{11}^+ \quad T_{22}^- \quad T_{22}^+ \quad T_{12}^- \quad T_{12}^+ \quad T_{13}^- \quad T_{13}^+ \quad T_{23}^- \quad T_{23}^+ \quad T_{33}^- \quad T_{33}^+ \right]^T,$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{\Gamma} = \left[\hat{T}_{vv}^- \quad \hat{T}_{vv}^+ \quad \hat{T}_{vt}^- \quad \hat{T}_{vt}^+ \quad \hat{T}_{v3}^- \quad \hat{T}_{v3}^+ \right]^T, \quad \mathbf{P} = \left[-p_1^- \quad p_1^+ \quad -p_2^- \quad p_2^+ \quad -p_3^- \quad p_3^+ \right]^T,$$

$$\boldsymbol{\Xi} = \left[0(\nabla\Psi)_1 \quad 0(\nabla\Psi)_2 \quad 0(\nabla\Psi)_3 \right]^T,$$

$$(\nabla\Psi)_i = \frac{\partial\Psi}{\partial v_i^+} \left(\xi_1 + v_1^+, \xi_2 + v_2^+, \delta^+ + \Delta + v_3^+ \right),$$

где \mathbf{v} – столбец перемещений; \mathbf{v}_{Γ} – столбец перемещений граничного контура Γ^{el} ; \mathbf{E} – столбец независимо введенных деформаций лицевых плоскостей пластины; \mathbf{e} , $\boldsymbol{\eta}$ – столбцы, характеризующие линейные и нелинейные составляющие тензора деформаций Грина–Лагранжа (1.9); \mathbf{T} – столбец результирующих напряжений; $\hat{\mathbf{T}}_{\Gamma}$ – столбец внешних результирующих нагрузок, действующих на границе элемента Γ^{el} ; \mathbf{P} – столбец поверхностных нагрузок; \mathbf{D} – несимметричная матрица коэффициентов упругости размера 11×11 , элементы которой определяются на основе соотношений (2.6) с учетом допущений [2 – 6], принятых для расчета несжимаемых материалов, а также с целью преодоления Пуассоновского заклинания.

В вариационном уравнении (3.15), (4.1), (4.2) вектор-функции \mathbf{v} , \mathbf{E} , \mathbf{T} и множитель Лагранжа λ являются независимыми функциональными переменными, поэтому для них на элементе надлежит использовать независимые аппроксимации. Для перемещений воспользуемся стандартной билинейной аппроксимацией

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r \mathbf{v}_r \quad (r = \overline{1, 4}), \quad (4.3)$$

где $\mathbf{v}_r = \left[v_{1r}^- \quad v_{1r}^+ \quad v_{2r}^- \quad v_{2r}^+ \quad v_{3r}^- \quad v_{3r}^+ \right]^T$ – столбцы узловых перемещений;

$N_r(\xi_1, \xi_2)$ – линейные функции формы.

Для деформаций и результирующих напряжений согласно методу двойной аппроксимации [12, 13], обобщенному на случай учета поперечного обжатия [2 – 4], имеем еще более простые зависимости

$$\mathbf{E} = \sum_{r_1, r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{E}^{00} = \left[E_{11}^{-00} \quad E_{11}^{+00} \quad E_{22}^{-00} \quad E_{22}^{+00} \quad 2E_{12}^{-00} \quad 2E_{12}^{+00} \quad 2E_{13}^{-00} \quad 2E_{13}^{+00} \quad 2E_{23}^{-00} \quad 2E_{23}^{+00} \quad E_{33}^{00} \right]^T,$$

$$\mathbf{E}^{01} = \left[E_{11}^{-01} \quad E_{11}^{+01} \quad 2E_{13}^{-01} \quad 2E_{13}^{+01} \quad E_{33}^{01} \right]^T,$$

$$\mathbf{E}^{10} = \left[E_{22}^{-10} \quad E_{22}^{+10} \quad 2E_{23}^{-10} \quad 2E_{23}^{+10} \quad E_{33}^{10} \right]^T, \quad \mathbf{E}^{11} = \left[E_{33}^{11} \right];$$

$$\mathbf{T} = \sum_{r_1, r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{T}^{r_1 r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{T}^{00} = \left[T_{11}^{-00} \ T_{11}^{+00} \ T_{22}^{-00} \ T_{22}^{+00} \ T_{12}^{-00} \ T_{12}^{+00} \ T_{13}^{-00} \ T_{13}^{+00} \ T_{23}^{-00} \ T_{23}^{+00} \ T_{33}^{00} \right]^T,$$

$$\mathbf{T}^{01} = \left[T_{11}^{-01} \ T_{11}^{+01} \ T_{13}^{-01} \ T_{13}^{+01} \ T_{33}^{01} \right]^T,$$

$$\mathbf{T}^{10} = \left[T_{22}^{-10} \ T_{22}^{+10} \ T_{23}^{-10} \ T_{23}^{+10} \ T_{33}^{10} \right]^T, \quad \mathbf{T}^{11} = \left[T_{33}^{11} \right],$$

где \mathbf{Q}^{00} – единичная матрица размера 11×11 ; матрицы \mathbf{Q}^{01} , \mathbf{Q}^{10} размера 11×5 и столбец \mathbf{Q}^{11} размера 11×1 определены в [1]. Здесь и далее в этом разделе индексы r_1 , r_2 принимают значения 0 или 1.

Если ввести аппроксимации (4.3) – (4.5) в вариационное уравнение (3.15), (4.1), (4.2) и использовать стандартную процедуру смешанного МКЭ, то можно прийти, как и в [1], к уравнению равновесия элемента. Однако, принимая во внимание тот факт, что даже в простейших задачах (см., например, условие непроницаемости (3.6)) функция Ψ зависит от перемещений нелинейно, при вычислении вариации интеграла J_c из (4.2) будем придерживаться иной схемы

$$\delta J_c = \sum_r \left[\lambda_r \Xi_r^T \delta \mathbf{v}_r + \left(\Psi_r - \frac{1}{\varepsilon_{\text{reg}}} \lambda_r \right) \delta \lambda_r \right], \quad (4.6)$$

где λ_r , Ψ_r , Ξ_r – значения соответствующих функций в узлах элемента. В результате, получаем следующие уравнения равновесия элемента:

$$\mathbf{E}^{r_1 r_2} = \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \left(\mathbf{B}^{r_1 r_2} + \mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{V} \right) \mathbf{V}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{T}^{r_1 r_2} = \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2},$$

$$\sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} \left(\mathbf{B}^{r_1 r_2} + 2 \mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{V} \right)^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{T}^{r_1 r_2} + \mathbf{G}_c(\mathbf{V}) \mathbf{\Lambda} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{V} = \left[\mathbf{v}_1^T \ \mathbf{v}_2^T \ \mathbf{v}_3^T \ \mathbf{v}_4^T \right]^T$ – столбец узловых перемещений элемента;

$\mathbf{\Lambda} = \left[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \right]^T$ – столбец узловых значений множителя Лагранжа; \mathbf{F} – столбец узловых нагрузок; $\mathbf{B}^{r_1 r_2}$ – матрицы размера 11×24 , характеризующие линейные составляющие тензора деформаций Грина-Лагранжа (1.9); $\mathbf{A}^{r_1 r_2}$ – трехмерные массивы размера $11 \times 24 \times 24$, характеризующие нелинейные составляющие тензора деформаций Грина-Лагранжа (1.9); \mathbf{G}_c – матрица размера 24×4 , отвечающая контактному взаимодействию элемента:

$$\mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Xi_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Xi_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Xi_4 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Отметим, что под обозначением $\mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{V}$ в уравнениях (4.7) следует понимать матрицы размера 11×24 , элементы которых вычисляются по формулам

$$\left(\mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{V}\right)_{pq} = \sum_s A_{pqs}^{r_1 r_2} V_s \quad \left(p = \overline{1, 11}; \quad q, s = \overline{1, 24}\right).$$

Уравнения равновесия элемента (4.7) необходимо дополнить соотношениями, отвечающими согласно (4.1), (4.6) за выполнение условий контакта. В зоне контакта ($\rho \in I_c$) должны удовлетворяться условия

$$\Psi_\rho - \frac{1}{\varepsilon_{\text{рег}}} \lambda_\rho = 0, \quad \lambda_\rho \leq 0, \quad (4.9)$$

а вне зоны контакта ($\rho \notin I_c$) – условия

$$\Psi_\rho \geq 0, \quad \lambda_\rho = 0, \quad (4.10)$$

где $I_c \subset \{1, 2, 3, 4\}$ обозначает множество узлов, входящих в контакт.

Исключая далее в уравнениях (4.7) столбцы $\mathbf{E}^{r_1 r_2}$ и $\mathbf{T}^{r_1 r_2}$, приходим к разрешающей системе уравнений

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}) + \mathbf{G}_c(\mathbf{V}) \mathbf{\Lambda} = \mathbf{F}, \quad (4.11)$$

где

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}) = \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} \left(\mathbf{B}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{V}\right)^T \mathbf{D}^{r_1 r_2} \left(\mathbf{B}^{r_1 r_2} + \mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{V}\right) \mathbf{V}. \quad (4.12)$$

В формуле (4.12) для удобства записи введены матрицы размера 11×11 :

$$\mathbf{D}^{r_1 r_2} = \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2}\right)^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2}\right)^T.$$

Уравнения равновесия (4.8), (4.11), (4.12) и условия непроникания (4.9), (4.10) являются нелинейными, поэтому для решения сформулированной задачи применим метод Ньютона–Рафсона. Линеаризованные уравнения равновесия имеют вид

$$\mathbf{K}^{[n]} \mathbf{V}^{[n+1]} + \mathbf{G}_c \left(\mathbf{V}^{[n]}\right) \mathbf{\Lambda}^{[n+1]} = \mathbf{F} - \mathbf{G} \left(\mathbf{V}^{[n]}\right) + \mathbf{K}^{[n]} \mathbf{V}^{[n]}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{K}^{[n]} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{V}} \left(\mathbf{V}^{[n]}\right) + \frac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial \mathbf{V}} \left(\mathbf{V}^{[n]}\right) \mathbf{\Lambda}^{[n]}.$$

При этом в зоне контакта ($\rho \in I_c$) должны выполняться условия

$$\Xi^T \left(\mathbf{v}_\rho^{[n]}\right) \mathbf{v}_\rho^{[n+1]} - \frac{1}{\varepsilon_{\text{рег}}} \lambda_\rho^{[n+1]} = \Xi^T \left(\mathbf{v}_\rho^{[n]}\right) \mathbf{v}_\rho^{[n]} - \Psi \left(\mathbf{v}_\rho^{[n]}\right), \quad (4.14a)$$

$$\lambda_\rho^{[n+1]} \leq 0; \quad (4.14b)$$

вне зоны контакта ($\rho \notin I_c$) – условия

$$\Xi^T \left(\mathbf{v}_\rho^{[n]} \right) \mathbf{v}_\rho^{[n+1]} \geq \Xi^T \left(\mathbf{v}_\rho^{[n]} \right) \mathbf{v}_\rho^{[n]} - \Psi \left(\mathbf{v}_\rho^{[n]} \right), \quad (4.15a)$$

$$\lambda_\rho^{[n+1]} = 0. \quad (4.15b)$$

На стандартной процедуре сборки элементов в ансамбль с получением системы уравнений относительно глобального вектора узловых перемещений здесь останавливаться не будем. Далее, как и в [1], был использован метод проб и ошибок, суть которого состоит в следующем. Вначале задается начальное приближение зоны контакта и решается методом Гаусса линейная система уравнений (4.13), (4.14a), (4.15b), затем проверяется выполнение неравенств (4.14b), (4.15a). Если неравенство (4.14b) не выполняется, то узел выводится из зоны контакта. В случае, если не выполняется неравенство (4.15a), то узел добавляется к зоне контакта.

5 Анализ численных результатов

Рассмотрим задачу цилиндрического изгиба пластины абсолютно жестким цилиндрическим штампом радиуса R . Будем полагать, что к обоим торцам пластины приложены равные по величине консервативные силы P , при этом сам штамп является неподвижным (рис. 3). Условие непроникания контактирующих тел может быть записано в виде (3.6) с учетом условия $\Delta = 0$.

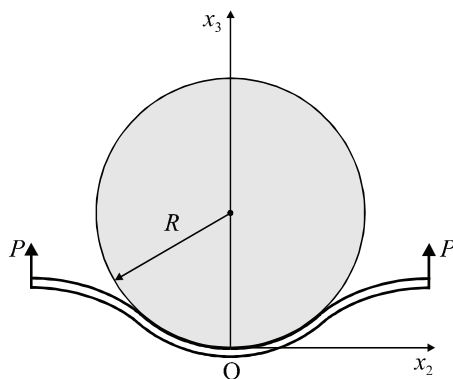


Рис. 3 Взаимодействие бесконечно длинной пластины с жестким цилиндрическим штампом

Результаты решения задачи в геометрически линейной [1] и нелинейной постановках при $E = 2 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,3$; $h = 2$ мм; $\ell = 100$ мм, где 2ℓ – длина пластины, представлены в табл. 1, 2. Изучены случаи пологого ($R = 1000$ мм) и непологого ($R = 100$ мм) цилиндрических штампов. Вследствие симметрии задачи рассмотрена одна половина пластины, которая разбивалась на 40 элементов. Для параметра регуляризации были выбраны такие значения: в случае пологого штампа $\varepsilon^{\text{reg}} = 10^5$ (см. работу [1]), непологого штампа $\varepsilon^{\text{reg}} = 10^1$. Выбор параметра регуляризации является важным этапом обсуждаемого алгоритма, существенно влияя на результаты расчета контактного давления [1]. Однако, при определенных навыках, анализируя распределение контактного давления по деформированной поверхности пластины, можно придти практически к оптимальному значению для этого параметра.

Таблица 1

**Сравнение результатов расчета в геометрически линейной [1]
и нелинейной постановках для пологого цилиндрического штампа
($R = 1000$ мм)**

Вариант	Линейная задача [1], мм			Нелинейная задача, мм		
	P , Н/мм	b_{int}	b_{ext}	$\bar{v}_3(\pm\ell)$	b_{int}	b_{ext}
0,1	0,0	0,0	1,138	0,0	0,0	1,138
0,3	0,0	2,5	3,410	0,0	2,5	3,407
0,5	40,0	42,5	4,427	40,0	42,5	4,419
1,0	70,0	72,5	4,857	70,0	72,5	4,846
2,0	85,0	87,5	4,965	85,0	87,5	4,952
3,0	90,0	92,5	4,985	90,0	92,5	4,971

Таблица 2

**Результаты решения геометрически нелинейной задачи
для непологого цилиндрического штампа ($R = 100$ мм)**

P , Н/мм	b_{int} , мм	b_{ext} , мм	$\bar{v}_3(\pm\ell)$, мм
1,25	0,0	2,5	26,39
2,5	0,0	37,5	39,62
5,0	0,0	65,0	43,85
10,0	0,0	82,5	45,11
20,0	0,0	92,5	45,50

Из табл. 1 видно, что в случае пологого штампа учет геометрической нелинейности не влияет на результаты расчета координат начальной b_{int} и конечной b_{ext} точек контакта, поскольку в контакт со штампом вступают лишь несколько узлов. Достаточно близкие результаты получены и для нормальных перемещений срединных точек торцевых сечений пластины $\bar{v}_3(\pm\ell)$. К принципиально иной картине приходим в случае непологого штампа, когда контакт согласно данным табл. 2 является многоточечным. Здесь уже не наблюдается отрыва центрального сечения пластины от штампа во всем диапазоне исследованных нагрузок. Рис. 4 дополнительно показывает распределение контактного давления по деформированной поверхности пластины при ее взаимодействии с непологим штампом для нескольких значений безразмерного параметра нагружения.

В заключение проанализируем результаты расчета реакции контактного давления в направлении оси Ox_3

$$P_c = 2 \int_0^{\ell} \lambda (v_3^+ - R) dx_2.$$

Так, в случае неполого штампа при нагружении пластины по торцам силами $P = 20$ Н/мм для реакции контактного давления было получено значение $P_c = 20,00000002$ Н/мм, что свидетельствует о достаточно высокой точности вычислений.

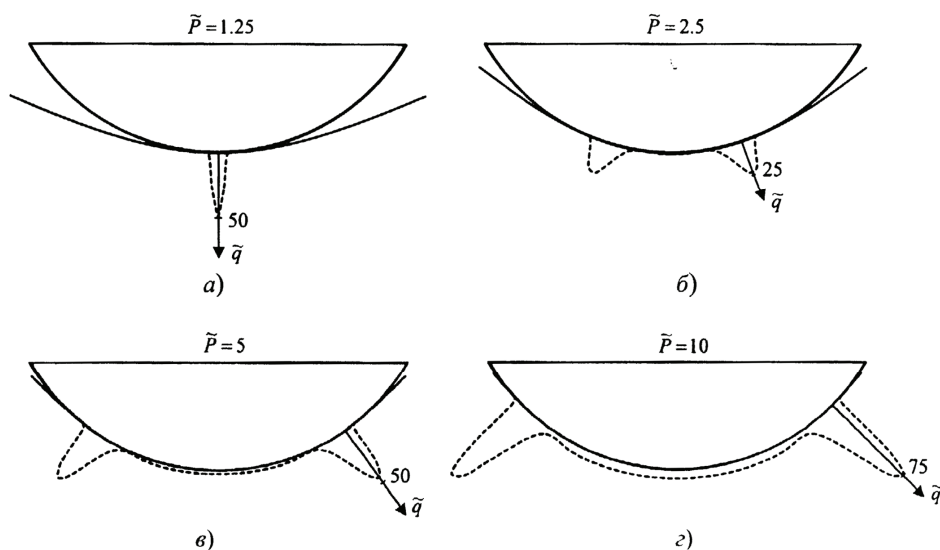


Рис. 4 Распределение безразмерного контактного давления $\tilde{q} = 16q_n^+ R^2 \ell / Eh^3$ по длине деформированной пластины при различных значениях безразмерного параметра нагружения $\tilde{P} = 16PR^2 / Eh$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00070).

Список литературы

1. Куликов Г.М. Контактное взаимодействие упругой пластины с жестким телом. 1. Геометрически линейная постановка / Г.М. Куликов, С.В. Плотникова, Д.В. Казаков // Вестник ТГТУ. – 2004. – Т.10, № 1Б. – С. 180 – 194.
2. Куликов Г.М. Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов / Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Механика композитных материалов. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 815 – 826.
3. Kulikov G.M. Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid body motions. Part I. Timoshenko-Mindlin shell theory / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2003. – V. 192, No 7 – 8. – Pp. 851 – 875.
4. Kulikov G.M. Finite deformation plate theory and large rigid-body motions / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2004. – V. 39, No 7. – Pp. 1093 – 1109.
5. Куликов Г.М. Сравнительный анализ двух алгоритмов численного решения нелинейных задач статики многослойных анизотропных оболочек вращения. 2. Учет поперечного обжатия / Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Механика композитных материалов. – 1999. – Т. 35, No 4. – С. 435 – 446.
6. Kulikov G.M. Refined global approximation theory of multilayered plates and shells / G.M. Kulikov // Journal of Engineering Mechanics. – 2001. – V. 127, No 2. – Pp. 119-125.
7. Новожилов В.В. Теория упругости / В.В. Новожилов – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
8. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация / А.Ю. Ишлинский – М.: Наука, 1976. – 672 с.

9. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу – М.: Мир, 1987. – 542 с.
10. Bischoff M. On the Physical Significance of Higher Order Kinematic and Static Variables in a Three-Dimensional Shell Formulation / M. Bischoff, E. Ramm // International Journal of Solids and Structures. – 2000. – V. 37. – С. 6933 – 6960.
11. Zhong Z.H. Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems / Z.H. Zhong – Oxford: Univ. Press, 1993. – 371 p.
12. Hughes T.J.R. Finite Elements Based upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element / T.J.R. Hughes, T.E. Tezduyar // Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics. – 1981. – Vol. 48. – P. 587-596.
13. Wempner G. A Simple and Efficient Approximation of Shells via Finite Quadrilateral Elements / G. Wempner, D. Talaslidis, C.M. Hwang // Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics. – 1982. – Vol. 49. – P. 115–120.
-

Contact Problem for the Elastic Plate and Rigid Body. 2 Geometrically Nonlinear Formulation

G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova

Department of Applied Mathematics and Mechanics, TSTU

Key words and phrases: geometrically nonlinear contact problem; Timoshenko-type plate; mixed finite element method; perturbed Lagrangian formulation.

Abstract: A contact problem for the elastic Timoshenko-type plate undergoing arbitrarily large displacements and rotations and the rigid punch is considered. The numerical algorithm has been elaborated for solving the contact problem on the basis of the mixed FEM by using the perturbed Lagrangian formulation. Six displacements of the face planes of the plate are chosen as unknown functions. This allows to simplify a solution of the contact problems, since with the help of such displacements the kinematic conditions of no penetration are formulated, and to derive relationships for the components of the Green-Lagrange strain tensor exactly representing arbitrarily large rigid body motions.

Kontaktzusammenwirken der elastischen Platte mit dem Hartkörper

Zusammenfassung: Es ist die Aufgabe des Kontaktzusammenwirkens der elastischen zu den Verlagerungen und Drehungen untergezogenen Platte von Timoschenko-Klasse mit der absolut harten Stanze betrachtet. Es ist der Algorithmus der zahlenmäßigen Lösung der Kontaktaufgabe auf Grund der gemischten Methode von Endelementen mit Benutzung der modifizierten Methode von Lagrange-Multiplikatoren erarbeitet. Als gesuchte Funktionen werden 6 Verlagerungen von Vorderplattenflächen gewählt. Das erlaubt, die Einstellung von Kontaktaufgaben zu vereinfachen und die Verhältnisse für die Komponente des Deformationstensors von Green-Lagrange zu erhalten.

Interaction de contact d'une plaquette élastique avec un corps rigide.

2. Procédure non-linéaire géométriquement

Résumé: Est examiné le problème de l'interaction de contact d'une plaquette élastique du type Timochenko soumise aux grands déplacements arbitraires et aux détours avec une étampe absolument rigide. Est élaborée l'algorithme de la solution du problème de contact à la base de la méthode mixte des éléments finies avec l'utilisation de la méthode modifiée de Lagrange. En qualité des fonctions recherchées sont choisis 6 déplacements des surfaces de face de la plaquette ce qui permet de simplifier la formation des problèmes de contact parce que c'est à l'aide de ces déplacements que sont formulées les conditions de la non-pénétration des corps de contact; et d'obtenir les relations pour les composants du tenseur de Green-Lagrange qui représentent avec précision les grands déplacements arbitraires de la plaquette étant un corps rigide.
