УДК 532.59

ПЛАНОВЫЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

А.И. Урусов

Кафедра высшей математики, ТГТУ

Представлена членом редколлегии профессором Н.П. Пучковым

Ключевые слова и фразы: волновая гидродинамика; плановая модель; поверхностные волны; длинные волны; нелинейно-дисперсионная модель.

Аннотация: В случае потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости обсуждаются некоторые методы построения двумерных в плане приближенных моделей, описывающих распространение длинных поверхностных волн, учитывающих нелинейные и дисперсионные эффекты. В частности, получена новая нелинейно-дисперсионная модель, пригодная для изучения распространения длинных поверхностных волн и их взаимодействия с телом, частично погруженным в жидкость.

---

1. Пусть $z = -\xi(x, y)$ – уравнение дна бассейна, $z = \eta(x, y)$ – уравнение верхней поверхности жидкости (включая свободную поверхность, а также смоченную поверхность тела, закрепленного или плавающего, частично погруженного в идеальную несжимаемую жидкость). Тогда течение идеальной несжимаемой жидкости в области

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \mid (x, y) \in R^2,\ -\xi(x, y) \le z \le \eta(t, x, y)\right\}$$

описывается системой уравнений

$$\nabla \vec{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} + \nabla p = \vec{g} \tag{2}$$

где $\vec{u} = (u, v, w)$ – скорость; $\vec{g} = (0, 0, g)$ – вектор плотности массовых сил; g – ускорение свободного падения; p – давление. На твердых границах ставится условие непротекания

$$\vec{u}\,\vec{n} = U_n, \tag{3}$$

где U_n – скорость движения твердой границы в направлении нормали $\vec{n}$. На свободной поверхности жидкости – два условия:

$$\eta_t + u\eta_x + \eta_y - w|_{z=\eta} = 0, \text{ – кинематическое условие,} \tag{4}$$

$$p|_{z=\eta} = p_a, \text{ – динамическое условие.} \tag{5}$$

Здесь p_a – заданное давление на свободной поверхности.

Уравнения (1) – (5) дополняются начальными условиями, кроме того, если тело не закреплено, то необходимо добавить также уравнения движения твердого тела. Целью настоящей работы является построение приближенной плановой модели, описывающей взаимодействие длинных поверхностных волн с телом, полупогруженным в жидкость.

2. Для описания распространения длинных гравитационных волн предложено в настоящее время довольно много плановых моделей [1], которые могут быть получены из (1) – (5) различными способами.

Один из подходов связан с выделением некоторого класса функций, в котором ищется решение системы (1) – (5). Например, если искать решение в классе функций, для которых будет выполнено предположение о гидростатичности давления, то получим систему уравнений мелкой воды для «средних» скоростей [2]. Если искать решение в классе функций таких, что эйлеровы координаты частиц жидкости зависят линейно от «вертикальной» лагранжевой координаты частицы, то получим модель Грина–Найди [3]. Такой подход позволяет получать приближенные плановые модели без предположения о потенциальности течения идеальной несжимаемой жидкости. Другие подходы существенно используют предположение о потенциальности движения.

В случае потенциального течения система (1) – (5) может быть записана в виде:

$$\Delta\Phi = 0, \tag{6}$$

$$\Phi_x \xi_x + \Phi_y \xi_y + \Phi_z \,|_{z=-\xi} = 0, \tag{7}$$

$$\eta_t + \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y - \Phi_z \,|_{z=\eta} = 0, \tag{8}$$

$$\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + g\eta \,|_{z=\eta} = 0, \quad (x, y) \notin \omega. \tag{9}$$

Здесь условие (7) – это условие непротекания; (8) – кинематическое условие на свободной поверхности или условие совпадения скоростей движения смоченной поверхности тела и соответствующих частиц жидкости в направлении нормали к поверхности тела (соответственно); (9) – динамическое условие на свободной поверхности при $(x, y) \notin \omega$; Φ – потенциал, т.е. $\vec{u} = \nabla\Phi$; ω – проекция смоченной поверхности тела на плоскость Oxy.

Если предположить, что $|\nabla\Phi|$ и $|\eta|$ малы, то из (6) – (9) можно получить линейную задачу Коши–Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0, \\ \Phi_{tt} + g\Phi_z \,|_{z=\eta} = 0, \\ \eta = -\dfrac{1}{g}\Phi_t \,|_{z=0}, \\ \Phi \,|_{t=0} = \Phi_0. \end{cases} \tag{10}$$

Если $\xi = \text{const}$, $\Phi = \varphi(z)\exp\{i(kx + my) - i\omega t\}$, то подстановка в (10) дает следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 = gn \cdot th(n\xi), \; n = \sqrt{k^2 + m^2}, \tag{11}$$

$$\text{т.е. } \omega^2 = gn^2\xi\left[1 - \frac{1}{3}(n\xi)^2 + \frac{2}{15}(n\xi)^4 - \frac{17}{315}(n\xi)^6 + \frac{62}{2835}(n\xi)^8 - \dots\right].$$

Один из способов получения приближенных моделей связан с аппроксимацией дисперсионного соотношения (11). Например, в [4] предложен приближенный метод описания трансформации поверхностных волн на основе полиномиальной аппроксимации соотношения (11) вида $\omega^2 + \frac{\xi}{g}\omega^4 = g\xi n^2$.

И, наконец, наиболее распространенный подход связан с введением в (6) – (9) малого параметра (или параметров) и разложением по этому параметру (параметрам). Так могут быть получены уравнения Буссинеска, Перегрина, Алешкова и др.

В [5], используя первый из представленных выше способов получения приближенных моделей, предложена простая модель первого приближения, описывающая взаимодействие длинных поверхностных волн с полупогруженным телом.

Численные расчеты задачи о набегании уединенной волны на полупогруженный параллелепипед, проведенные по этой модели, показали, что при отражении волн от полупогруженного тела формируется волна типа солитона. В то же время расчеты аналогичной задачи для системы (6) – (9) показывают, что при отражении волны от полупогруженного тела формируется волна, имеющая синусоидальный профиль. Это вызывает необходимость построения более точной модели, учитывающей нелинейно-дисперсионный характер движения поверхностных волн.

3. Пусть L^* – характерный горизонтальный размер (тем самым предполагаем, что длина набегающей волны примерно соответствует протяженности твердого тела), H^* – характерная глубина, $\mu = \left(H^*/L^*\right)^2 << 1$. Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} x' = x/L^*,\ y' = y/L^*,\ z' = z/H^*,\ t' = t\sqrt{gH^*}/L^*, \\ \eta = H^*\eta',\ \xi = H^*\xi',\ \Phi = L^*\sqrt{gH^*}\Phi'. \end{cases} \tag{12}$$

Тогда в новых переменных система (6) – (9) примет вид (штрихи опущены, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\Delta = \nabla^2$):

$$\begin{cases} \mu\,\Delta\Phi + \Phi_{zz} = 0,\ -\xi < z < \eta,\ (x,y) \in R^2, \\ \mu\,\nabla\Phi\cdot\nabla\xi + \Phi_z\,|_{z=-\xi} = 0,\ (x,y)\in R^2, \\ \mu(\eta_t + \nabla\Phi\cdot\nabla\eta) - \Phi_z\,|_{z=\eta} = 0,\ (x,y)\in R^2, \\ \mu\left(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + \eta\right) + \frac{1}{2}\Phi_z^2\Big|_{z=\eta} = 0,\ (x,y)\in\omega. \end{cases} \tag{13}$$

Пусть $\varphi = \Phi\big|_{z=-\xi},\ (x,y)\notin\omega,\ \psi = \Phi\big|_{z=-\xi},\ (x,y)\in\omega$. Тогда для φ и η получаем следующую систему, полученную Алешковым [6]:

$$H_t + \nabla(H\nabla\varphi) = \mu\nabla\left\{H\nabla\xi(\nabla\varphi\nabla\xi) + \frac{H^2}{2}\left[\nabla\xi\nabla\varphi + \nabla(\nabla\varphi\nabla\xi)\right] + \frac{H^3}{6}\nabla(\Delta\varphi)\right\} + O(\mu^2),$$
$$(x,y)\notin\omega, \tag{14}$$

$$\varphi_t + \eta + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 = \mu\left\{\frac{1}{2}(\nabla\varphi\nabla\xi)^2 + H\left[\nabla\xi\nabla\varphi_t + \nabla\varphi\nabla(\nabla\varphi\nabla\xi)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{H^2}{2}\left[\Delta\varphi_t + \nabla\varphi\nabla(\Delta\varphi) - (\Delta\varphi)^2\right]\right\} + O(\mu^2),\ (x,y)\notin\omega, \tag{15}$$

а для ψ (под телом) получаем уравнение

$$\nabla(H\nabla\psi) = \mu\nabla\left\{H\nabla\xi(\nabla\psi\nabla\xi) + \frac{H^2}{2}\left[\nabla\xi\,\Delta\psi + (\nabla\psi\nabla\xi)\right] + \frac{H^3}{6}\nabla(\Delta\psi)\right\} + O(\mu^2),$$
$$(x,y)\in\omega. \qquad (16)$$

Здесь $H = \eta + \xi.$. Причем $H = H(t,x,y)$, если $(x,y)\notin\omega$ и $H = H(x,y)$, если $(x,y)\in\omega$. Заметим, что дисперсионное соотношение для системы (14) – (16), записанной в размерном виде, имеет вид

$$\omega^2 = gn^2\xi\frac{1+\xi^2n^2/6}{1+\xi^2n^2/2} = gn^2\xi\left\{1 - \frac{1}{3}(n\xi)^2 + \frac{1}{6}(n\xi)^4 - ...\right\}. \qquad (17)$$

Если систему (14) – (16) дополнить условиями согласования на границе $\partial\omega$, то полученную систему можно было бы рассматривать как искомую плановую модель. Но, во-первых, уравнение (15) неудобно для численной реализации, а во-вторых, система (14) – (16) требует в каждой точке $\partial\omega$ четырех условий согласования. Уравнение (15) можно заменить на эквивалентное с точностью до величин $O(\mu^2)$, которое будет более приемлемым для численной реализации:

$$\left(\varphi - \mu H\nabla\xi\nabla\varphi - \mu\frac{H^2}{2}\Delta\varphi\right)_t + \eta + \frac{1}{2}\left|\nabla\varphi\right|^2 =$$
$$= \frac{\mu}{2}\left\{(\nabla\varphi\nabla\xi)^2 + \nabla\left[H^2\Delta\varphi\nabla\varphi + 2H\nabla\varphi(\nabla\varphi\nabla\xi)\right]\right\} + O(\mu^2). \qquad (18)$$

Заметим, что дисперсионное соотношение для системы (14), (18) будет иметь вид (17).

Оказывается, что можно получить систему, эквивалентную системе (14), (15) с точностью до величин $O(\mu^2)$, такую, что вместе с уравнением (16) будет получена система, для которой потребуется три условия согласования в каждой точке $\partial\omega$. Очевидно, что чем больше условий согласования, тем труднее разработать численный алгоритм, реализующий модель. Именно по этой причине так важно уменьшить число условий согласования.

Для получения требуемой модели вначале из (14) и (15) находим, что $H\Delta\varphi = \varphi_{tt} + \nabla\varphi\nabla\varphi_t - \nabla H\nabla\varphi + O(\mu)$. Используя это соотношение из (14), (15) получим систему, эквивалентную исходной с точностью $O(\mu^2)$, которую запишем в размерном виде:

$$\begin{cases} \eta_t + \nabla(H\nabla\varphi) = \nabla\left\{H\nabla\xi(\nabla\varphi\nabla\xi) + \dfrac{H^2}{2}\left[\nabla\xi\Delta\varphi + \nabla(\nabla\varphi\nabla\xi)\right] + \right. \\ \left. + \dfrac{H^2}{6g}\nabla\left[\varphi_{tt} + \nabla\varphi\nabla\varphi_t - g\nabla H\nabla\varphi\right] - \dfrac{H}{6g}\nabla H\left[\varphi_{tt} + \nabla\varphi\nabla\varphi_t - g\nabla H\nabla\varphi\right]\right\}, \\ \left(\varphi - H\nabla\xi\nabla\varphi - \dfrac{H^2}{2}\Delta\varphi\right)_t + g\eta + \dfrac{1}{2}\left|\nabla\varphi\right|^2 = \dfrac{1}{2}(\nabla\varphi\nabla\xi)^2 + \dfrac{1}{2}\nabla[H^2\Delta\varphi\nabla\varphi + \\ + 2H\nabla\varphi(\nabla\varphi\nabla\xi)]. \end{cases} \qquad (19)$$

Далее сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x' = x/L^*, \ y' = y/L^*, \ t' = t\sqrt{gH^*}/L^*, \\ \eta = A^*\eta', \ \xi = H^*\xi', \ \varphi = \varphi' gA^* L^*/\sqrt{gH^*}, \end{cases} \tag{20}$$

где A^* – характерная амплитуда волны, полагая $\alpha = A^*/H^*$, $\mu = (H^*/L^*)^2$ – малые параметры, записываем (19) в новых переменных, а затем, считая, что параметр Урселла $\alpha/\mu = O(1)$ (т.е. нелинейные и дисперсионные эффекты имеют один и тот же порядок малости) и пренебрегая членами порядка $O(\alpha\mu, \mu^2)$, получим систему, которая в безразмерном виде может быть записана так

$$\begin{cases} \eta_t + \nabla(H\nabla\varphi) = \dfrac{\mu}{2}\nabla\left\{\nabla(\xi^2\nabla\varphi\nabla\xi) + \xi^2\nabla\xi\Delta\varphi + \dfrac{\xi^3}{3g}\nabla\left[(\varphi_{tt} - \nabla\xi\nabla\varphi)/\xi\right]\right\}, \\ \left[\varphi - \dfrac{\mu}{2}\nabla(\xi^2\nabla\varphi)\right]_t + g\eta + \dfrac{\alpha}{2}|\nabla\varphi|^2 = 0, \qquad H = \xi + \alpha\eta. \end{cases} \tag{21}$$

Отметим, что система (21) – новая нелинейно-дисперсионная модель, пригодная для изучения распространения длинных поверхностных волн.

Дисперсионное соотношение для системы (21) имеет вид

$$\omega^2 = gn^2\xi\frac{1}{1+\xi^2 n^2/3} = gn^2\xi\left\{1 - \frac{1}{3}(n\xi)^2 + \frac{1}{9}(n\xi)^4 - \ldots\right\}. \tag{22}$$

Итак, теперь можно, суммируя все сказанное выше, говорить о том, что для получения требуемой модели надо взять систему (21) при $(x,y) \notin \omega$ и уравнение (16) при $(x,y) \in \omega$ и дополнить эти уравнения условиями согласования при $(x,y) \in \partial\omega$, которые можно получить из интегральных законов сохранения, аналогично тому, как были получены условия согласования для модели первого приближения [5]. Если осадка тела не очень велика, то условия сопряжения можно получить, потребовав непрерывность потенциала и давления в точках внутренней границы $\partial\omega$. Тогда получаем следующую систему, записанную для случая закрепленного тела и одной прстранственной переменной, $\eta = \text{const}$ при $x \in [x_1, x_2] = \omega$, $H = \xi + \alpha\eta$ $(x \notin \omega)$, $h = \xi + \eta$, $(x \in \omega)$, $\xi = \text{const}$ (т.е. предполагаем, что боковые стенки тела вертикальные):

$$\eta_t + (H\varphi_x)_x = \frac{\mu}{6}\xi^2\varphi_{ttxx}, \ x \notin [x_1, x_2], \tag{23}$$

$$\left(\varphi - \frac{\mu}{2}\xi^2\varphi_{xx}\right)_t + g\eta + \frac{\alpha}{2}|\varphi_x|^2 = 0, \ x \notin [x_1, x_2], \tag{24}$$

$$\left(\psi - \mu\frac{h^2}{6}\psi_{xx}\right)_{xx} = 0, \ x \in [x_1, x_2], \tag{25}$$

$$\varphi\Big|_{x=x_j} = \psi\Big|_{x=x_j}, \tag{26}$$

$$\varphi_x\Big|_{x=x_j} = \psi_x\Big|_{x=x_j}, \tag{27}$$

$$\varphi_{xx}\Big|_{x=x_j} = \psi_{xx}\Big|_{x=x_j}, \ j = 1, 2. \tag{28}$$

Для численного решения уравнений (23) – (28) был разработан алгоритм и проведена серия численных расчетов задачи о набегании уединенной волны на закрепленный прямоугольный параллелепипед, частично погруженный в жидкость. Получено достаточно хорошее совпадение с результатами расчетов той же задачи по полной модели (6) – (9).

Список литературы

1. Марчук Ан.Г. Численное моделирование волн цунами / Ан.Г. Марчук, Л.Б. Чубаров, Ю.И. Шокин. – Новосибирск: Наука, 1983. – 176 с.
2. Стокер Дж. Волны на воде / Дж. Стокер. – М.: ИЛ, 1959. – 618 с.
3. Green A.E. A Derivation Equtions for Wave Propagation in Water of Variable Depth / A.E. Green, P.M. Naghdi // J.Fluid Mech. – 1976. – V.78, part 2. – P. 237 – 246.
4. Пелиновский Е.Н. «Дифференциальная» модель волн на воде / Е.Н. Пелиновский // ДАН СССР. – 1988. – Т.300, № 5. – С. 1231 – 1234.
5. Численное моделирование взаимодействия поверхностных волн с телом, частично погруженным в жидкость // Моделирование в механике: Разностные схемы / В.Г. Исаев, А.И. Урусов, Г.С. Хакимзянов, В.Н. Яньшин. – Новосибирск, 1989. – Т.3(20), № 5. С. 35 – 45.
6. Алешков Ю.З. Полная модель процесса распространения длинных волн и их взаимодействия с преградами / Ю.З. Алешков // Исследование цунами. – М.: ВИНИТИ, 1987. – С. 113 – 122.

Scheduled Models of Wave Hydrodynamics

A.I. Urusov

Department of Higher Mathematics, TSTU

Key words and phrases: wave hydrodynamics; scheduled model; surface waves; long waves; nonlinear-dispersing model.

Abstract: Some methods of construction of bi-dimentionals by way of the approximate models describing spread of long surface waves, taking into account nonlinear and dispersing effects are discussed in case of potential current of ideal incompressible liquid. In particular, the new non-linear dispersing model, suitable for studying distribution of long surface waves and their interaction with a body partly immersed in liquid is obtained.

Planmässige Modelle der Wellenhydrodynamik

Zusammenfassung: Im Falle des potentiellen Ablaufes der idealen nicht zusammengepressten Flüßigkeit werden einige Methoden der Konstruktion der zweidimensionalen Modelle besprochen. Sie beschreiben die Verbreitung der langen oberflächlichen Welle und ziehen die Ulinear- und Disperssionseffekte in Betracht. Unter anderem ist das neue Unleniardisperssionsmodell, das für die Erlernung des Vertriebes der langen oberflächlichen Wellen und ihr Zusammenwirken mit dem teilweise in die Flüßigkeit geladenen Körper brauchbar ist, erhalten.

Modèles planifiés de l'hydrodynamique ondulaire

Résumé: Dans le cas de l'écoulement du fluide idéale incompressible sont discutées quelques méthodes de la construction des modèles bidimensionnels dans le plan de l'approximation qui décrivent la propagation des ondes longues de surface, tenant compte des effets non-linéaires et ceux de dispertion. En particulier, on donne un nouveau modèle non-linéaire de dispertion qui convient à l'étude de la propagation des ondes longues de surface et de leur interaction avec le corps plongé partiellement dans un liquide.