УДК 519.6

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ПО УПРАВЛЯЮЩИМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ*

А.П. Афанасьев[1], С.М. Дзюба[2], Т.Б. Заусонина[2], С.М. Лобанов[2]

Институт системного анализа РАН, г. Москва (1);
ТГУ им. Г.Р. Державина (2)

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Бодровым

Ключевые слова и фразы: линейные по управляющим воздействиям задачи оптимального управления; нелокальная продолжаемость решений; свойства решений.

Аннотация: Изучены свойства нелокально продолжаемых решений линейных по управляющим воздействиям задач оптимального управления. Приводятся условия нелокальной продолжаемости решений и неактивизации ограничений при переключении оптимальных режимов.

---

1 Введение

Задача оптимального управления со смешанными ограничениями на фазовые координаты и на управления, линейная по последним, с начальным значением в точке на левом конце и со свободным правым концом, с фиксированным временем в канонической форме А.Я. Дубовицкого и А.А. Милютина всегда может быть представлена в следующем виде:

$$J(x) = \int_{t_0}^{T} \langle G(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt \to \min, \tag{1}$$

$$A(x(t))\dot{x}(t) = B(x(t)), \tag{2}$$

$$C(x(t))\dot{x}(t) \geq D(x(t)), \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, A и C – матрицы размерностей $p \times n$ и $q \times n$ соответственно, а G, B и D – вектора размерностей n, p и q соответственно; верно также и обратное (см., например, [1, с. 6]).

Прямое использование необходимых условий оптимальности не позволяет в большинстве случаев непосредственно подойти к вопросу о построении оптимальных траекторий, а лишь обеспечивает постановку достаточно сложной краевой задачи для возникающей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При качественном исследовании или при численном решении этой краевой задачи возникают значительные трудности. Поэтому для решения задачи (1) – (4)

---

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №№ 01-01-00543, 03-01-00329.

в литературе [1, 2] предложен принцип продолжения решений, заключающийся в следующем: решение исходной задачи сводится к построению некоторой специальным образом генерируемой последовательности простейших задач, решение которых можно полностью установить с помощью соответствующих необходимых условий. Основной целью настоящей работы является распространение некоторых из результатов [1, 2] на случай задачи

$$J(x) = \int_{t_0}^{\infty} \langle G(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt \to \min \tag{5}$$

с ограничениями (2) – (4).

2 Локальные задачи и их решение

Прежде всего, приведем некоторые результаты работы [1] и главы 7 работы [2], составляющие основу для дальнейшего исследования.

Предположим, что:

a) все функции A, B, C, D и G удовлетворяют условиям Липшица.

Назовем режимом $r_i[t_i, t_{i+1}]$ совокупность ограничений (2) и те ограничения из (3), которые являются активными на некотором промежутке $[t_i, t_{i+1}] \subset [t_0, T]$ и вместе определяют некоторое решение $x_{r_i}(t)$ на указанном промежутке. Будем называть режим оптимальным, если промежуток $[t_i, t_{i+1}]$ определяет такой набор ограничений, что соответствующая траектория $x^*_{r_i}(t) \in [t_i, t_{i+1}]$ является частью оптимальной траектории $x^*(t)$. Совокупность уравнений (2) и активных ограничений из (3), определяющих режим, будет обозначать

$$R(x)\dot{x} = P(x).$$

Совокупность же неактивных ограничений из (3) будем обозначать

$$K(x)\dot{x} > L(x).$$

Назовем задачу (1) – (4) локальной, если величина промежутка $[t_0, T]$ такова, что режим или последовательность режимов на этом промежутке можно установить в результате решения задачи или последовательности задач линейного программирования (**ЛП**).

Свяжем с задачей (1) – (4) следующую задачу ЛП:

$$\langle G(x_0), y \rangle \to \min, \tag{6}$$

$$A(x_0)y = B(x_0), \tag{7}$$

$$C(x_0)y \geq D(x_0). \tag{8}$$

Предположим, что:

b) многогранник

$$Y(x_0) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : R(x_0)y = P(x_0), \quad K(x_0)y \geq L(x_0) \right\}$$

ограничен и имеет непустую внутренность (в этом случае решение задачи (6) – (8) существует).

c) пусть при этом

$$\operatorname{rank}(R(x_0)) = \dim(P(x_0)) \le n.$$

Оказывается, что при выполнении условий (a) – (c) найдется такой конечный промежуток $[t_0, T)$, $T > t_0$, что существует абсолютно непрерывное решение $x^*(t)$ задачи (1) – (4) и при этом с необходимостью

$$R(x^*(t))\dot{x}(t) = P(x^*(t))$$

почти для всех значений $t \in [t_0, T)$ (см. [2, с. 215]). Если при этом $\operatorname{rank}(R(x_0)) = n$, то решение $x^*(t)$ определяется решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^*(t) = R^{-1}(x^*(t))P(x^*(t)) \tag{9}$$

с начальным условием

$$x^*(t_0) = x_0\,. \tag{10}$$

3 Нелокально продолжаемые решения

Прежде всего, установим важнейшее свойство нелокально продолжаемых решений. В случае, когда матрица $R(x)$ невырождена, для простоты обозначений положим

$$f(x) = R^{-1}(x)P(x).$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^n$ *– некоторое непустое компактное множество и пусть для всех* $x_0 \in E$ *выполнены условия* (a) – (c), *причем*

$$\operatorname{rank}(R(x_0)) = \dim(P(x_0)) = n.$$

Тогда, если x_0 *– некоторая точка множества* E *и решение* $x(t)$ *локальной задачи* (1) – (4), *удовлетворяющее системе*

$$\dot{x} = f(x) \tag{11}$$

с начальными значениями (t_0, x_0), *может быть продолжено на всю полуось* $[t_0, \infty)$ *и целиком содержится при этом продолжении в множестве* E, *то для каждого положительного числа* T *из каждой последовательности*

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, \lim_{k\to\infty} N_k = \infty \tag{12}$$

натуральных чисел можно выбрать такую ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \ldots, N_{k_l}, \ldots, \lim_{l\to\infty} N_{k_l} = \infty\,,$$

что

$$\lim_{l\to\infty} x(t + (N_{k_l} - 1)T) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b]$ *полуоси* $[t_0, \infty)$, *где* $\varphi(t)$ *– абсолютно непрерывное решение задачи*

$$J(\varphi)=\int_{t_0}^{\infty}\langle G(\varphi(t)),\dot\varphi(t)\rangle dt\to\min,$$

$$A(\varphi(t))\dot\varphi(t)=B(\varphi(t)),$$

$$C(\varphi(t))\dot\varphi(t)\ge D(\varphi(t)),$$

$$\varphi(t_0)=\lim_{l\to\infty}x(t_0+(N_{k_l}-1)T),$$

содержащееся в E *и удовлетворяющее условию*

$$\lim_{l\to\infty}\varphi(t+(N_{k_l+1}-N_{k_l})T)=\varphi(t)$$

равномерно на всей полуоси $[t_0,\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без какой-либо потери общности для простоты обозначений положим $t_0=0$. Пусть при этом $x_1(t)$ – абсолютно непрерывное решение задачи (1) – (4), которое может быть продолжено на всю полуось $[0,\infty)$ и содержится в множестве E, т.е. с необходимостью $x_1(t)$ – абсолютно непрерывное решение системы (11) с начальными значениями $(0,x_0)$, определенное для всех значений $t\ge 0$ и целиком содержащееся в E. Тогда, очевидно, $x_1(t)$ является также и решением интегрального уравнения

$$x_1(t)=x_0+\int_0^t f(x_1(\tau))d\tau.$$

Для некоторого положительного числа T и всех значений $t\ge 0$ положим

$$x_N(t)=x_1(t+(N-1)T),\qquad N=1,\ 2,\ 3,\ \dots \tag{13}$$

Тогда, как несложно заметить, при этих значениях t и N имеет место равенство

$$x_N(t)=x_0+\int_0^T f(x_1(\tau))d\tau+\dots+\int_0^T f(x_{N-1}(\tau))d\tau+\int_0^t f(x_N(\tau))d\tau,$$

которое, очевидно, может быть переписано в следующем эквивалентном виде

$$x_N(t)=x_N(0)+\int_0^t f(x_N(\tau))d\tau, \tag{14}$$

Пусть теперь (12) – произвольная последовательность натуральных чисел, в соответствие с которой из последовательности (13) выберем последовательность

$$x_{N_1},x_{N_2},\dots,x_{N_k},\dots,\lim_{k\to\infty}x_{N_k}=\infty. \tag{15}$$

Поскольку множество E компактно, множество (15) равномерно ограничено на отрезке $[0,T]$. Кроме того, из равенства (14) непосредственно следует, что множество (15) равностепенно непрерывно на $[0,T]$. Поэтому из него можно выбрать равномерно сходящуюся на отрезке $[0,T]$ последовательность

$$x_{N_{k_1}},x_{N_{k_2}},\dots,x_{N_{k_l}},\dots,\lim_{l\to\infty}x_{N_{k_l}}=\infty, \tag{16}$$

пределом которой является функция φ, определенная и непрерывная для всех значений $0 \le t \le T$, т.е.

$$\lim_{l\to\infty} x_{N_{k_l}}(t) = \varphi(t) \tag{17}$$

равномерно на $[0,T]$. При этом функция φ по построению целиком содержится в множестве E. Более того, в силу равенств (14) и (17) несложно заметить, что φ абсолютно непрерывна на $[0,T]$.

Для простоты обозначений будем считать, что выбранная подпоследовательность (16) совпадает с последовательностью (15). Введем в рассмотрение последовательность задач

$$J_{N_k}(x) = \int_0^T \langle G(x(t)), \dot{x}(t)\rangle dt \to \min,$$

$$A(x(t))\dot{x}(t) = B(x(t)),$$

$$C(x(t))\dot{x}(t) \ge D(x(t)),$$

$$x(0) = x_{N_k}(0),$$

где $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Решение x_{N_k} каждой из этих задач по построению существует и в силу равенства (14) является решением интегрального уравнения

$$x_{N_k}(t) = x_{N_k}(0) + \int_0^t f(x_{N_k}(\tau))d\tau. \tag{18}$$

Но, так как в силу (17)

$$\lim_{k\to\infty} x_{N_k}(t) = \varphi(t)$$

равномерно на отрезке $[0,T]$, а в силу (18)

$$\lim_{k\to\infty} \dot{x}_{N_k}(t) = \dot{\varphi}(t)$$

почти всюду на $[0,T]$, то согласно теореме Лебега

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \langle G(x_{N_k}(\tau)), \dot{x}_{N_k}(\tau)\rangle dt = \int_0^T \langle G(\varphi(\tau)), \dot{\varphi}(\tau)\rangle d\tau$$

и, следовательно, функция $\varphi(t)$ является абсолютно непрерывным решением задачи

$$J(x) = \int_0^T \langle G(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t)(t)\rangle dt \to \min,$$

$$A(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = B(\varphi(t)),$$

$$C(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \ge D(\varphi(t)(t)),$$

$$\varphi(0) = \lim_{k\to\infty} x_{N_k}(0)\,.$$

Поэтому с необходимостью для всех значений $0 \le t \le T$ справедливо равенство

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t f(\varphi(\tau))d\tau \,, \qquad (19)$$

в котором $\varphi_0 = \varphi(0)$, т.е. $\varphi(t)$ – абсолютно непрерывное решение системы (11) с начальными значениями $(0, \varphi_0)$.

Пусть

$$\Delta(N_1), \Delta(N_2), ..., \Delta(N_k), ...$$

– множество, элементы которого при всех значениях N_k определим по формуле

$$\Delta(N_k) = N_{k+1} - N_k \,.$$

При этом потребуем, чтобы

$$\lim_{k \to \infty} \Delta(N_k) = \infty \,;$$

последнего всегда можно добиться, удалив из множества (16) соответствующие элементы при сохранении его счетности.

Заметим теперь, что в силу равенства (14) множество (15) равностепенно непрерывно и равномерно ограничено на всей полуоси $[0, \infty)$. Поэтому без потери общности можно считать, что для всех значений $t \ge 0$ имеет место равенство

$$\lim_{k \to \infty} x_{N_k}(t) = \varphi(t) \,, \qquad (20)$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a, b]$ полуоси $[0, \infty)$. Последнее, как несложно заметить, означает, что функция $\varphi(t)$, построенная по формуле (20), является абсолютно непрерывным решением задачи

$$J(\varphi) = \int_0^\infty \langle G(\varphi(t)), \dot\varphi(t) \rangle dt \to \min,$$

$$A(\varphi(t))\dot\varphi(t) = B(\varphi(t)),$$

$$C(\varphi(t))\dot\varphi(t) \ge D(\varphi(t)),$$

$$\varphi(0) = \lim_{k \to \infty} x_{N_k}(0) \,,$$

т.е. решением уравнения (19), определенным для всех значений $t \ge 0$ и содержащимся при этих значениях t в множестве E.

Поскольку для всех значений N_k

$$x_{N_{k+1}}(0) = x_{N_k}(\Delta(N_k)T), \qquad (21)$$

то

$$\varphi_0 = \lim_{k \to \infty} x_{N_k}(\Delta(N_k)T). \qquad (22)$$

Более того, так как функция φ целиком содержится в компактном множестве E, без какой-либо потери общности можем считать, что существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(\Delta(N_k)T) = \varphi_0^*,$$

где φ_0^* – некоторая точка множества E.

Если

$$\varphi_0 \neq \varphi_0^*,$$

то в силу условий (21) и (22) найдется такое положительное число ε и такое натуральное число k_0, зависящее от ε, что

$$\left| x_{N_k}(\Delta(N_k)T) - \varphi(\Delta(N_k)T) \right| \geq \varepsilon$$

при $k > k_0$. Поэтому для всех значений $k > k_0$ справедливо неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left| x_{N_k}(t + \Delta(N_k)T) - \varphi(t + \Delta(N_k)T) \right| \geq \varepsilon \tag{23}$$

Легко видеть, что множество M функций

$$\varphi(t), \varphi(t+T), \ldots, \varphi(t+NT), \ldots,$$

определенных на отрезке $[0, T]$, по построению равностепенно непрерывно и равномерно ограничено на $[0, T]$. Поэтому замыкание $\bar{M}$ множества M – компактное в топологии равномерной сходимости на $[0, T]$ множество.

Для всех значений $0 \leq t \leq T$ положим

$$x^*(t) = \lim_{k \to \infty} x_{N_k}(t + \Delta(N_k)T), \tag{24}$$

причем в силу равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности множества (15) на отрезке $[0, T]$ можем принять существование такого предела. Пусть при этом

$$t_k = (\Delta(N_k) + 1)T, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

Тогда согласно неравенству (23) для всех значений $k > k_0$ наряду с (24) справедливо также и неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq t_k} \left| x_{N_k}(t) - \varphi(t) \right| \geq \varepsilon .$$

Обозначим через k_1 – некоторое натуральное число, удовлетворяющее условию $k > k_0$. Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_1}} \left| x_{N_{k_1}}(t) - \varphi(t) \right| \geq \varepsilon .$$

Более того, найдется такое положительное число $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и такое натуральное число $k_2 > k_1$, что

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_1}} \left| x_{N_{k_2}}(t) - \varphi(t) \right| < \varepsilon_1 .$$

Далее, пусть теперь k_2 – некоторое натуральное число, удовлетворяющее условию $k_2 > k_1$. Тогда, как и ранее,

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k2}} \left| x_{N_{k_2}}(t) - \varphi(t) \right| \geq \varepsilon ,$$

причем найдется такое положительное число $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и такое натуральное число $k_3 > k_2$, что

$$\max_{0 \le t \le t_{k_2}} \left| x_{N_{k_3}}(t) - \varphi(t) \right| < \varepsilon_2 .$$

Продолжая действовать аналогичным образом, несложно построить такую последовательность

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_l, ..., \lim_{l \to \infty} \varepsilon_l = 0$$

положительных чисел и такую последовательность

$$k_1, k_2, ..., k_l, ..., \lim_{l \to \infty} k_l = \infty$$

натуральных чисел, что

$$\max_{0 \le t \le t_{k_l}} \left| x_{N_{k_l}}(t) - \varphi(t) \right| \ge \varepsilon \tag{25}$$

и

$$\max_{0 \le t \le t_{k_l}} \left| x_{N_{k_{l+1}}}(t) - \varphi(t) \right| < \varepsilon_l . \tag{26}$$

Заметим теперь, что объединение

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} \left[0, t_{k_l} \right]$$

расширяющихся отрезков

$$\left[0, t_{k_1} \right] \subset \left[0, t_{k_2} \right] \subset \ ... \ \subset \left[0, t_{k_l} \right] \subset ...$$

исчерпывает всю полуось $[0, \infty)$, а на каждом из этих отрезков $\left[0, t_{k_l} \right]$ выполнены неравенства (25) и (26). Поэтому в силу неравенства (23) $x^* \notin \bar{M}$. Последнее, однако, противоречит условиям (22) и (24). Отсюда следует, что

$$\varphi_0 = \lim_{k \to \infty} \varphi(\Delta(N_k)T) \tag{27}$$

и, значит, в силу соотношений (20) и (27) для всех значений $t \ge 0$ справедливо равенство

$$\varphi(t) = \lim_{k \to \infty} \varphi(t + \Delta(N_k)T), \tag{28}$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a, b]$ полуоси $[0, \infty)$. Но согласно компактности множества $\bar{M}$ отсюда непосредственно следует, что в равенстве (28) равномерная сходимость имеет место на всей полуоси $[0, \infty)$.

Заметим теперь, что выбор числа T и последовательности (12) выше, по-существу, не играл никакой роли. Поэтому в силу соотношений (20) и (28) теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. В условиях теоремы 1 выбор последовательности (12) не зависит от выбора числа T и обратно.

4 Условия нелокального продолжения

Перейдем теперь к рассмотрению условий нелокального продолжения решений задачи (1) – (4) и построению на этой основе решения задачи (5), (2) – (4). Пусть $W^1(x),...,W^m(x)$ – числовые функции, определенные и непрерывные вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial W^i}{\partial x^j}, \qquad i=1,...,m, \qquad j=1,...,n$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$ и пусть Σ – область, задаваемая неравенствами

$$W^i(x)<0, \qquad i=1,...,m.$$

Для всех $x_0\in\Sigma$ примем в дальнейшем выполнение условий (a) – (c) и, более того, предположим, что

d) для всех $x_0\in\Sigma$

$$\operatorname{rank}(R(x_0))=n\,.$$

Для простоты обозначений положим

$$f(x)=R^{-1}(x)P(x)$$

и будем искать решение задачи (5), (2) – (4) из решения локальной задачи (1) – (4) посредством продолжения решения уравнения (9) с начальным условием (10) на всю полуось $[t_0,\infty)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть на границе $\partial\Sigma$ области Σ выполнены условия*

$$\left\langle \nabla W^i(x), f(x)\right\rangle<0, \qquad i=1,...,m \tag{29}$$

и пусть область Σ ограничена. Тогда, если x_0 – некоторая точка области Σ, то решение $x(t)$ локальной задачи (1) – (4), *удовлетворяющее системе* (11) *с начальными значениями* (t_0,x_0), *может быть продолжено на всю полуось* $[t_0,\infty)$ *и является при этом продолжении решением задачи* (5), (2) – (4), *целиком содержится в области Σ. Более полно, для каждого положительного числа T из каждой последовательности*

$$N_1,N_2,...,N_k,..., \lim_{k\to\infty}N_k=\infty \tag{30}$$

натуральных чисел можно выбрать такую ее подпоследовательность

$$N_{k_1},N_{k_2},...,N_{k_l},..., \lim_{l\to\infty}N_{k_l}=\infty\,,$$

что

$$\lim_{l\to\infty}x(t+(N_{k_l}-1)T)=\varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a,b]$ *полуоси* $[t_0,\infty)$, *где* $\varphi(t)$ *– абсолютно непрерывное решение задачи*

$$J(\varphi)=\int_0^\infty \left\langle G(\varphi(t)),\dot\varphi(t)\right\rangle dt\to \min,$$

$$A(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = B(\varphi(t)),$$

$$C(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \geq D(\varphi(t)),$$

$$\varphi(t_0) = \lim_{l\to\infty} x(t_0 + (N_{k_l} - 1)T),$$

содержащееся в Σ *и удовлетворяющее условию*

$$\lim_{l\to\infty} \varphi(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T) = \varphi(t)$$

равномерно на всей полуоси $[t_0, \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Прежде всего, заметим, что найдется такой отличный от нуля промежуток $[t_0, t_1)$, что оптимальное управление будет определяться из решения задачи ЛП и, следовательно, системы (11) с начальными значениями (t_0, x_0). Более того, очевидно, что данное решение может быть продолжено до выхода на границу $\partial\Sigma$ области Σ. Это и определяет некоторый режим.

Поскольку точка x_0 принадлежит к открытому множеству Σ, то имеют место неравенства

$$W^i(x_0) < 0, \qquad i = 1,...,m .$$

Вдоль решения $x(t)$ положим

$$w^i(t) = W^i(x(t)), \qquad i = 1,...,m.$$

Обозначим через Δ – некоторое покрытие границы $\partial\Sigma$ области Σ областями, а через Λ пересечение $\Delta \cap \Sigma$ множеств Δ и Σ. Тогда, поскольку на границе $\partial\Sigma$ области Σ имеют место равенства

$$W^i(x) = 0, \qquad i = 1,...,m,$$

то покрытие Λ, очевидно, может быть подобрано так, что для всех значений $x \in \Lambda$ выполняются условия (29). Поэтому, если $x_0 \in \Lambda$, то для всех значений $t_0 \leq t \leq t_1$, для которых определено решение $x(t)$, справедливы также и равенства

$$w^i(t) = w^i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left\langle \nabla W^i(x(\tau)), f(x(\tau)) \right\rangle d\tau, \qquad i = 1,...,m,$$

т.е. в силу неравенства (29)

$$w^i(t) \leq w^i(t_0) \ < 0, \qquad i = 1,...,m,$$

причем при $t_0 \leq t \leq t_1$

$$w^i(t) < w^i(t_0), \qquad i = 1,...,m.$$

Следовательно, решение определено для всех значений $t \geq t_0$ и содержится при этих значениях t в некотором компактном множестве $E \subset \Sigma$.

Если точка x_0 не принадлежит к множеству Λ, то решение $x(t)$ не может покинуть область Σ минуя Λ. Поэтому и в последнем случае $x(t)$ также определено для всех значений $t \geq t_0$ и содержится при этих значениях t в Σ. Но множество Σ ограничено, и значит, решение $x(t)$ локальной задачи (1) – (4) может быть продолжено на всю полуось $[t_0,\infty)$ и является при продолжении решением задачи (5), (2) – (4), содержащимся в множестве E. Таким образом, в силу теоремы 1 теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 2 . Как и в случае теоремы 1 в условиях теоремы 2 выбор последовательности (30) не зависит от выбора числа T и обратно. При этом сами условия нелокальной продолжаемости (29) весьма близки к соответствующим условиям теоремы 3.2 книги [3]. Отметим также, что теоремы 1 и 2 являются обобщением основных результатов работ [4 – 6] на случай рассматриваемой задачи.

5 Переключение режимов

Конструкция, примененная при доказательстве теоремы 2, может быть использована для выявления одного важного свойства решений локальных задач, связанного с активизацией ограничений и переходом с одного режима на другой – переключением режимов.

Для простоты обозначений положим

$$W(x) = L(x) - K(x) f(x),$$

где $W = (W^1,...,W^{p+q-n})$ – векторная функция, характеризующая неактивные ограничения в задаче (1) – (4) с режимом $r_i[t_i,t_{i+1}]$, при выполнении условий (a) – (d) порождающим функцию f. Обозначим через Σ_j множество точек x пространства $\mathbb{R}^n$, для которых

$$W^j(x) < 0\,, \tag{31}$$

где $j = 1,..., p+q-n$. Тогда имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 3 . *Пусть при некотором значении* $1 \le j \le p+q-n$ *на границе* $\partial\Sigma_j$ *области* Σ_j *выполнено условие*

$$\left\langle \nabla W^j(x), f(x) \right\rangle < 0. \tag{32}$$

Тогда при переключении режима $r_i[t_i,t_{i+1}]$ *ограничение* (31) *не активизируется. Более того, если неравенство* (32) *выполняется для всех значений* $j = 1,..., p+q-n$, *то переключений режимов в задаче* (1) – (4) *не существует*.

Доказательство теоремы 3 почти дословно повторяет доказательство теоремы 2 и, поэтому, здесь не приводится. Отметим только, что теорема 3 может оказаться полезной при исследовании задач ЛП, по которым строится решение задачи (1) – (4).

Список литературы

1. Афанасьев А.П. Линейные по управляющим воздействиям задачи оптимального управления / А.П. Афанасьев. – М.: ВНИИСИ, 1980. – 60 с.
2. Афанасьев А.П. Необходимое условие в оптимальном управлении. / А.П. Афанасьев, В.В. Дикусар, А.А. Милютин и др.– М.: Наука, 1990. – 332 с.
3. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966. – 230 с.
4. Афанасьев А.П. К вопросам управления в периодических процессах / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 4. – С. 15 –20.

5. Дзюба С.М. Об условно-периодических решениях дифференциальных уравнений / С.М. Дзюба // Дифференциальные уравнения. – 1999. Т. 35, № 8. – С. 1020 – 1023.

6. Афанасьев А.П. Квазипериодические процессы в задачах управления / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2001. № 2. – С. 22 – 28.

Some Solutions Properties of Linear on Controlling Actions Problems of Optimum Control

A.P. Afanasyev[1], S.M. Dzyuba[2], T.B. Zausonina[2], S.M. Lobanov[2]

Institute of the System Analysis of the Russian Academy of Science, Moscow (1); Tambov State University Named after G.R. Derzhavin (2)

Key words and phrases: linear on controlling actions of optimum control tasks; not local continuability of solutions; properties of solutions.

Abstract: Properties of not locally extendable solutions of linear on control actions of optimum control tasks are investigated. Conditions of not local continuability solutions and not activization limitations at switching optimal modes are given.

Einige Eigenschaften der Lösung der nach den leitenden Einwirkungen linearen Aufgaben des optimalen Regierens

Zusammenfassung: Es sind die Eigenschaften der unlokal fortsetzenden Lösungen der nach den leitenden Einwirkungen linearen Aufgaben des optimalen Regierens untersucht. Es werden die Bedingungen der unlokalen fortsetzenden Lösungen und der Unaktivisierung der Beschränkungen bei der Umschaltung der optimalen Regimes angeführt.

Quelques propriétés des solutions linéaires sur les actions gestionnaires de la commande optimale

Résumé: Sont étudiées les propriétés des solutions continues non localement sur les actions gestionnaires des problèmes de la commande optimale. Sont citées les conditions de la durabilité non locale des solutions et de la non activisation des limitations au cours du changement des régimes optimaux.