

УДК 539.3

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ЛИНЕЙНАЯ ПОСТАНОВКА

Г.М. Куликов, С.В. Плотникова, Д.В. Казаков

Кафедра «Прикладная математика и механика», ТГТУ

Ключевые слова и фразы: геометрически линейная контактная задача; модифицированный метод множителей Лагранжа; пластина типа Тимошенко; смешанный метод конечных элементов.

Аннотация: Рассмотрена задача контактного взаимодействия геометрически линейной упругой пластины типа Тимошенко с абсолютно жестким штампом постоянной кривизны. Получено новое аналитическое решение задачи цилиндрического изгиба пластины с учетом поперечного обжатия. Разработан алгоритм численного решения контактной задачи на основе смешанного метода конечных элементов (МКЭ) с использованием модифицированного метода множителей Лагранжа. Приведено сопоставление полученных численных и аналитических результатов и даны рекомендации по выбору регуляризационного параметра, характеризующего жесткостные характеристики штампа.

Введение

Проблема расчета упругих пластин, взаимодействующих с абсолютно жесткими штампами еще не является окончательно решенной. Причина кроется в необходимости значительного усложнения теории для получения приемлемых результатов. В первую очередь это относится к учету поперечного обжатия, поскольку порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений даже в простейшем варианте теории пластин типа Тимошенко возрастает до двенадцати [1]. Отметим также, что обстоятельный анализ различных постановок контактных задач для пластин, взаимодействующих с жесткими штампами представлен в монографии [2].

На основе теории упругих оболочек типа Тимошенко с учетом поперечного обжатия [3 – 5] разработан алгоритм численного решения контактной задачи для геометрически линейной пластины с использованием смешанных конечно-элементных аппроксимаций [6, 7]. Существенной особенностью подхода [3 – 7] является то, что в качестве искомым функций выбираются 6 перемещений лицевых поверхностей пластины. Это позволяет, во-первых, упростить формулировку контактной задачи [1, 8], так как в качестве искомым функций выбираются функции, с помощью которых формулируются условия непроникания контактирующих тел; и, во-вторых, разработать эффективные конечные элементы пластины типа Тимошенко с точки зрения точного представления перемещений элемента как жесткого целого [6, 7].

1 Постановка задачи

Рассмотрим пластину постоянной толщины h , ограниченную лицевыми плоскостями S^- и S^+ , расположенными на расстояниях δ^- и δ^+ от отсчетной плоскости S , соответственно, и боковой поверхностью Ω , перпендикулярной к S (рис. 1). Отнесем плоскость S к системе декартовых координат x_1, x_2 ; поперечную координату x_3 направим по направлению нормали к S . Пусть \bar{S} – срединная плоскость пластины; $\bar{\Gamma} = \bar{S} \cap \Omega$ – граничный контур; \mathbf{e}_i – базисные векторы декартовой системы координат x_i ; p_i^\pm – внешние поверхностные нагрузки, действующие на лицевых поверхностях S^\pm ; $\mathbf{q} = q_v \mathbf{v} + q_t \mathbf{t} + q_3 \mathbf{e}_3$ – вектор внешних поверхностных нагрузок, действующих на боковой поверхности Ω ; \mathbf{v}, \mathbf{t} – нормальный и тангенциальный единичные векторы к граничному контуру $\bar{\Gamma}$; u_i – компоненты вектора перемещений; $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ – компоненты тензоров деформаций и напряжений. Здесь и далее латинские индексы $i, j, \ell, m = 1, 2, 3$; а греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$.

Воспользуемся кинематической гипотезой Тимошенко о линейном распределении перемещений по толщине пластины [3, 4]:

$$\mathbf{u} = N^-(x_3) \mathbf{v}^- + N^+(x_3) \mathbf{v}^+, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v}^\pm = \sum_i v_i^\pm \mathbf{e}_i, \quad (1.2)$$

где \mathbf{v}^\pm – векторы перемещений точек лицевых поверхностей S^\pm ; $v_i^\pm(x_1, x_2)$ – компоненты этих векторов; $N^\pm(x_3)$ – линейные функции формы пластины:

$$N^-(x_3) = \frac{1}{h}(\delta^+ - x_3), \quad N^+(x_3) = \frac{1}{h}(x_3 - \delta^-).$$

Подставив перемещения (1.1), (1.2) в деформационные соотношения геометрически линейной теории упругости [9], приходим к деформационным соотношениям теории пластин типа Тимошенко

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha i} &= N^-(x_3) e_{\alpha i}^- + N^+(x_3) e_{\alpha i}^+, & \varepsilon_{33} &= e_{33}, \\ 2e_{\alpha\beta}^\pm &= \mathbf{v}_{,\alpha}^\pm \mathbf{e}_\beta + \mathbf{v}_{,\beta}^\pm \mathbf{e}_\alpha, & 2e_{\alpha 3}^\pm &= \boldsymbol{\beta} \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{v}_{,\alpha}^\pm \mathbf{e}_3, & e_{33} &= \boldsymbol{\beta} \mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\beta} &= \frac{1}{h}(\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь нижний индекс α , следующий после запятой, означает частное дифференцирование по координате x_α .

Деформационные соотношения (1.3) являются весьма привлекательными с точки зрения их использования в МКЭ, поскольку они *точно* представляют перемещения пластины как жесткого тела. Действительно, перемещения лицевых поверхностей пластины как жесткого тела можно представить в виде [6]

$$\mathbf{v}^{\pm R} = \boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{R}^\pm, \quad (1.4)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \sum_i \Delta_i \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\Phi} = \sum_i \Phi_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{R}^\pm = \sum_\alpha x_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \delta^\pm \mathbf{e}_3,$$

где $\boldsymbol{\Lambda}$ – вектор поступательного перемещения пластины; $\boldsymbol{\Phi}$ – вектор, характеризующий вращение пластины как жесткого целого вокруг точки O (рис. 1);

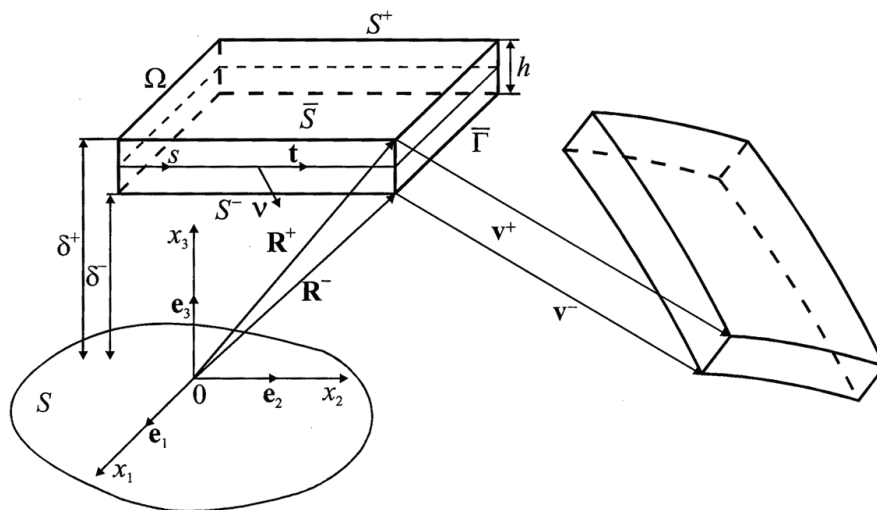


Рис. 1 Геометрия пластины

\mathbf{R}^{\pm} – радиус-векторы точек лицевых плоскостей S^{\pm} . Для производных векторов жестких смещений (1.4) имеет место формула

$$\mathbf{v}_{,\alpha}^{\pm R} = \Phi \times \mathbf{e}_{\alpha}. \quad (1.5)$$

Вводя далее формулы (1.4), (1.5) в деформационные соотношения (1.3), получим

$$2e_{\alpha i}^{\pm R} = (\Phi \times \mathbf{e}_{\alpha}) \mathbf{e}_i + (\Phi \times \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_{\alpha} = 0, \quad e_{33}^R = (\Phi \times \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 = 0,$$

что и требовалось доказать.

В целях дальнейшего использования деформационных соотношений (1.3) представим их в скалярной форме

$$2e_{\alpha\beta}^{\pm} = v_{\alpha,\beta}^{\pm} + v_{\beta,\alpha}^{\pm}, \quad 2e_{\alpha 3}^{\pm} = \beta_{\alpha} + v_{3,\alpha}^{\pm}, \quad e_{33} = \beta_3, \\ \beta_i = \frac{1}{h}(v_i^+ - v_i^-). \quad (1.6)$$

2 Вариационное уравнение Ху-Васидзу для упругой пластины типа Тимошенко

Как известно, уравнения равновесия, деформационные соотношения, уравнения обобщенного закона Гука и граничные условия на лицевых и торцевых поверхностях пластины представляют собой уравнения Эйлера и естественные граничные условия некоторой вариационной задачи. В связи с этим введем в смешанный вариационный принцип Ху-Васидзу [9] независимые аппроксимации перемещений (1.1) и деформаций

$$\varepsilon_{\alpha i} = N^-(x_3)E_{\alpha i}^- + N^+(x_3)E_{\alpha i}^+, \quad \varepsilon_{33} = E_{33}, \quad (2.1)$$

где $E_{\alpha\beta}^{\pm}(x_1, x_2)$, $E_{\alpha 3}^{\pm}(x_1, x_2)$ – тангенциальные и поперечные касательные деформации лицевых плоскостей пластины; $E_{33}(x_1, x_2)$ – поперечное обжатие пластины. В результате, учитывая соотношения (1.3), (1.6), приходим к следующему вариационному уравнению:

$$\delta J_{HW} = 0,$$

$$\begin{aligned} \delta J_{HW} = & \iint_S \left(\sum_{i+j<6} \left\{ \left[T_{ij}^- - \sum_{\ell+m<6} \left(D_{ij\ell m}^{00} E_{\ell m}^- + D_{ij\ell m}^{01} E_{\ell m}^+ \right) - \underline{D_{ij33}^-} E_{33} \right] \delta E_{ij}^- + \right. \right. \\ & + \left. \left[T_{ij}^+ - \sum_{\ell+m<6} \left(D_{ij\ell m}^{01} E_{\ell m}^- + D_{ij\ell m}^{11} E_{\ell m}^+ \right) - \underline{D_{ij33}^+} E_{33} \right] \delta E_{ij}^+ + \right. \\ & \left. \left. + (E_{ij}^- - e_{ij}^-) \delta T_{ij}^- + (E_{ij}^+ - e_{ij}^+) \delta T_{ij}^+ - T_{ij}^- \delta e_{ij}^- - T_{ij}^+ \delta e_{ij}^+ \right\} + \right. \\ & + \left. \left[T_{33} - \sum_{\ell+m<6} \left(D_{33\ell m}^- E_{\ell m}^- + D_{33\ell m}^+ E_{\ell m}^+ \right) - D_{3333} E_{33} \right] \delta E_{33} + (E_{33} - e_{33}) \delta T_{33} - \right. \\ & \left. - T_{33} \delta e_{33} + \sum_i \left(p_i^+ \delta v_i^+ - p_i^- \delta v_i^- \right) \right) dx_1 dx_2 + \\ & + \iint_{\Gamma} \left(\hat{T}_{v_v}^- \delta v_v^- + \hat{T}_{v_v}^+ \delta v_v^+ + \hat{T}_{v_t}^- \delta v_t^- + \hat{T}_{v_t}^+ \delta v_t^+ + \hat{T}_{v_3}^- \delta v_3^- + \hat{T}_{v_3}^+ \delta v_3^+ \right) ds. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Здесь $v_v^\pm, v_t^\pm, v_3^\pm$ – компоненты векторов перемещений лицевых плоскостей S^\pm в локальном базисе $\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{e}_3$ (рис. 1); $D_{ij\ell m}^{pq}, D_{ij\ell m}^\pm, D_{3333}$ – компоненты матрицы жесткости пластины; $T_{\alpha i}^\pm, T_{33}$ – результирующие напряжений; $\hat{T}_{v_v}^\pm, \hat{T}_{v_t}^\pm, \hat{T}_{v_3}^\pm$ – результирующие внешних поверхностных нагрузок, действующих на боковой поверхности Ω :

$$D_{ij\ell m}^{pq} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} b_{ij\ell m} \left[N^-(x_3) \right]^{2-p-q} \left[N^+(x_3) \right]^{p+q} dx_3 \quad (p, q = 0, 1),$$

$$D_{ij33}^- = D_{ij33}^{00} + D_{ij33}^{01}, \quad D_{ij33}^+ = D_{ij33}^{01} + D_{ij33}^{11}, \quad D_{3333} = D_{3333}^- + D_{3333}^+; \quad (2.3)$$

$$T_{\alpha i}^\pm = \int_{\delta^-}^{\delta^+} \sigma_{\alpha i} N^\pm(x_3) dx_3, \quad T_{33} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} \sigma_{33} dx_3,$$

$$\hat{T}_{v_{\alpha}}^\pm = \int_{\delta^-}^{\delta^+} q_{\alpha} N^\pm(x_3) dx_3 \quad (\alpha = v, t, 3), \quad (2.4)$$

где $b_{ij\ell m}$ – жесткости материала.

При вычислении компонент тензора напряжений могут быть использованы полные соотношения обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij} = \sum_{\ell, m} b_{ij\ell m} \varepsilon_{\ell m}. \quad (2.5)$$

Однако, при расчете пластин из несжимаемых или близких к ним по характеристикам материалов, у которых коэффициенты Пуассона близки к 0,5 [3, 8], а также с целью преодоления так называемого Пуассоновского заклинивания [10, 11] будем приближенно полагать в (2.5) $b_{\alpha\beta 33} = 0$. Вместе с тем уравнение для поперечного нормального напряжения используется в неизменном виде, т.е.

$b_{33\alpha\beta} \neq 0$. Сказанное означает, что согласно (2.3) подчеркнутые члены в вариационном уравнении (2.2) следует опустить. В результате приходим к несимметричной матрице жесткости [7], что, однако, не вносит существенных корректив в численную реализацию контактной задачи.

3 Модифицированное вариационное уравнение Ху-Васидзу для решения контактной задачи

Предположим, что контакт пластины с абсолютно жестким гладким выпуклым штампом осуществляется для определенности по части внешней плоскости S_c^+ , причем трение в области контакта отсутствует. Пусть поверхность штампа задается уравнением

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = -x_3 + \chi(x_1, x_2) = 0, \quad (3.1)$$

при этом внутри штампа $\Psi(x_1, x_2, x_3) < 0$, вне его $\Psi(x_1, x_2, x_3) > 0$.

Сдвинем штамп на величину Δ вертикально вниз, тогда уравнение поверхности штампа будет иметь вид

$$\Psi(x_1, x_2, x_3 + \Delta) = 0. \quad (3.2)$$

В результате перемещения штампа точка $M^+(x_1, x_2, \delta^+)$, принадлежащая поверхности предполагаемого контакта S_c^+ (рис. 2), переходит в новое положение $\hat{M}^+(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, где обозначено:

$$\hat{x}_\alpha = x_\alpha + v_\alpha^+, \quad \hat{x}_3 = \delta^+ + v_3^+. \quad (3.3)$$

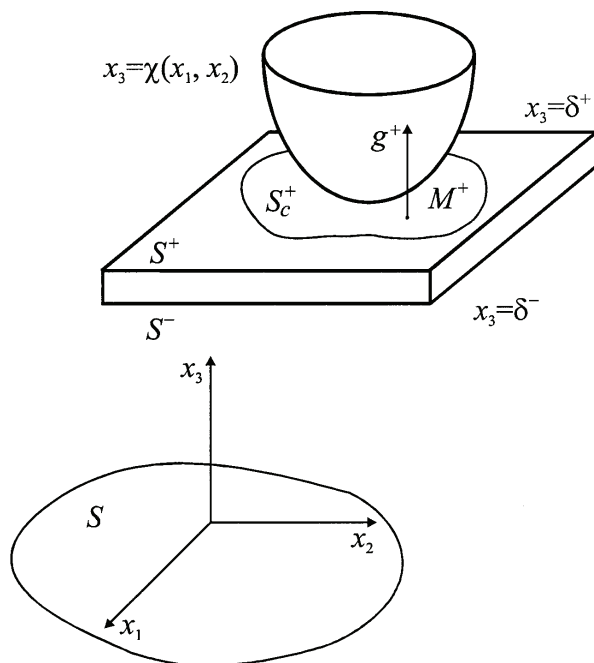


Рис. 2 Контакт пластины с жестким штампом

Учитывая формулы (3.2), (3.3), условие непроникания контактирующих тел можно записать так:

$$\Psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 + \Delta) \geq 0, \quad (3.4)$$

которое после линеаризации приводится к следующему неравенству:

$$-\delta^+ - v_3^+ - \Delta + \chi(x_1, x_2) + \frac{\partial \chi}{\partial x_1}(x_1, x_2)v_1^+ + \frac{\partial \chi}{\partial x_2}(x_1, x_2)v_2^+ \geq 0. \quad (3.5)$$

Ограничиваясь случаем *пологого* штампа и вводя начальный зазор

$$g^+(x_1, x_2) = \chi(x_1, x_2) - \delta^+, \quad (3.6)$$

условие непроникания (3.5) представим еще в более простой форме

$$\Phi(x_1, x_2) = g^+ - \Delta - v_3^+ \geq 0. \quad (3.7)$$

Условие неположительности контактного давления $q_c^+(x_1, x_2)$ запишем в виде

$$q_c^+ \leq 0. \quad (3.8)$$

Неравенства (3.7), (3.8) необходимо дополнить условием того, что контактное давление определяется в тех точках, которые вступают в контакт с жестким штампом, т.е. должно выполняться равенство

$$q_c^+(g^+ - \Delta - v_3^+) = 0. \quad (3.9)$$

Для решения задачи контактного взаимодействия пластины с жестким штампом рассмотрим вариационное уравнение (2.2), дополнив его одним слагаемым, отвечающим за выполнение условий контакта (3.7) – (3.9), и другим слагаемым [12], связанным с регуляризацией задачи

$$\delta J_{HW} - \delta \iint_{S_c^+} \left[\lambda \Phi - \frac{1}{2\varepsilon^{\text{reg}}} \lambda^2 \right] dx_1 dx_2 = 0, \quad (3.10)$$

где $\lambda(x_1, x_2)$ – множитель Лагранжа суть контактное давление; ε^{reg} – регуляризационный параметр. Отметим, что наличие регуляризационного члена в уравнении (3.10) подразумевает замену абсолютно жесткого штампа совокупностью непрерывно распределенных пружин с жесткостью ε^{reg} . При этом, предельный случай $\varepsilon^{\text{reg}} \rightarrow \infty$ соответствует классическому методу множителей Лагранжа.

С учетом (3.7) вариационное уравнение (3.10) приводится к виду

$$\delta J_{HW} - \iint_{S_c^+} \left[\left(\Phi - \frac{1}{\varepsilon^{\text{reg}}} \lambda \right) \delta \lambda - \lambda \delta v_3^+ \right] dx_1 dx_2 = 0, \quad (3.11)$$

которое будет положено в основу при построении смешанных элементов.

4 Алгоритм численного решения контактной задачи смешанным МКЭ

Смешанное вариационное уравнение (2.2), (3.11) для элемента пластины в его локальных координатах ξ_1, ξ_2 может быть записано в матричной форме так:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(\mathbf{T} - \mathbf{D}\mathbf{E})^T \delta \mathbf{E} + (\mathbf{E} - \mathbf{e})^T \delta \mathbf{T} - \mathbf{T}^T \delta \mathbf{e} + \right. \\
& \left. + (\mathbf{P} + \lambda \mathbf{m})^T \delta \mathbf{v} - \left(\Phi - \frac{1}{\varepsilon^{\text{reg}}} \lambda \right) \delta \lambda \right] d\xi_1 d\xi_2 + \int_{\bar{\Gamma}^{el}} \hat{\mathbf{T}}_{\Gamma}^T \delta \mathbf{v}_{\Gamma} ds = 0, \\
& \mathbf{v} = [v_1^- \ v_1^+ \ v_2^- \ v_2^+ \ v_3^- \ v_3^+]^T, \quad \mathbf{v}_{\Gamma} = [v_v^- \ v_v^+ \ v_t^- \ v_t^+ \ v_3^- \ v_3^+]^T, \\
& \mathbf{e} = [e_{11}^- \ e_{11}^+ \ e_{22}^- \ e_{22}^+ \ 2e_{12}^- \ 2e_{12}^+ \ 2e_{13}^- \ 2e_{13}^+ \ 2e_{23}^- \ 2e_{23}^+ \ e_{33}]^T, \\
& \mathbf{E} = [E_{11}^- \ E_{11}^+ \ E_{22}^- \ E_{22}^+ \ 2E_{12}^- \ 2E_{12}^+ \ 2E_{13}^- \ 2E_{13}^+ \ 2E_{23}^- \ 2E_{23}^+ \ E_{33}]^T, \\
& \mathbf{T} = [T_{11}^- \ T_{11}^+ \ T_{22}^- \ T_{22}^+ \ T_{12}^- \ T_{12}^+ \ T_{13}^- \ T_{13}^+ \ T_{23}^- \ T_{23}^+ \ T_{33}]^T, \\
& \hat{\mathbf{T}}_{\Gamma} = [\hat{T}_{v_v}^- \ \hat{T}_{v_v}^+ \ \hat{T}_{v_t}^- \ \hat{T}_{v_t}^+ \ \hat{T}_{v_3}^- \ \hat{T}_{v_3}^+]^T, \quad \mathbf{P} = [-p_1^- \ p_1^+ \ -p_2^- \ p_2^+ \ -p_3^- \ p_3^+]^T, \\
& \mathbf{m} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где \mathbf{v} – столбец перемещений; \mathbf{v}_{Γ} – столбец перемещений граничного контура элемента $\bar{\Gamma}^{el}$; \mathbf{e} , \mathbf{E} – столбцы деформаций лицевых плоскостей пластины из (1.3), (2.1); \mathbf{T} – столбец результирующих напряжений; $\hat{\mathbf{T}}_{\Gamma}$ – столбец внешних результирующих нагрузок, действующих на границе элемента $\bar{\Gamma}^{el}$; \mathbf{P} – столбец поверхностных нагрузок; \mathbf{D} – несимметричная матрица коэффициентов упругости размера 11×11 , элементы которой определяются на основе соотношений (2.3) с учетом допущений, принятых для расчета несжимаемых материалов [3, 7, 8], а также с целью преодоления Пуассоновского заклинивания [6, 13].

В функционале (4.1) вектор-функции \mathbf{v} , \mathbf{E} , \mathbf{T} и множитель Лагранжа λ являются независимыми функциональными переменными, поэтому для них на элементе надлежит использовать независимые аппроксимации. Для перемещений и множителя Лагранжа воспользуемся стандартной билинейной аппроксимацией

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r \mathbf{v}_r, \quad \lambda = \sum_r N_r \lambda_r, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{v}_r = [v_{1r}^- \ v_{1r}^+ \ v_{2r}^- \ v_{2r}^+ \ v_{3r}^- \ v_{3r}^+]^T$ – столбцы узловых перемещений; $N_r(\xi_1, \xi_2)$ – линейные функции формы; λ_r – значения множителя Лагранжа в узлах элемента. Здесь и далее индекс $r = \overline{1, 4}$.

Для деформаций согласно методу двойной аппроксимации [14, 15], обобщенному на случай учета поперечного обжатия [6, 13], имеем еще более простые зависимости

$$\mathbf{E} = \sum_{r_1, r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2}, \tag{4.3}$$

где

$$\mathbf{E}^{00} = \left[E_{11}^{-00} E_{11}^{+00} E_{22}^{-00} E_{22}^{+00} 2E_{12}^{-00} 2E_{12}^{+00} 2E_{13}^{-00} 2E_{13}^{+00} 2E_{23}^{-00} 2E_{23}^{+00} E_{33}^{00} \right]^T, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{E}^{01} = \left[E_{11}^{-01} E_{11}^{+01} 2E_{13}^{-01} 2E_{13}^{+01} E_{33}^{01} \right]^T,$$

$$\mathbf{E}^{10} = \left[E_{22}^{-10} E_{22}^{+10} 2E_{23}^{-10} 2E_{23}^{+10} E_{33}^{10} \right]^T, \quad \mathbf{E}^{11} = \left[E_{33}^{11} \right],$$

$$\mathbf{Q}^{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь \mathbf{Q}^{00} – единичная матрица размера 11×11 ; \mathbf{E}^{00} – столбец, характеризующий однородную форму деформации элемента; \mathbf{E}^{01} , \mathbf{E}^{10} , \mathbf{E}^{11} – столбцы, характеризующие неоднородные формы деформации. Здесь и далее индексы r_1 , r_2 принимают значения 0 или 1. Отметим также, что различный характер аппроксимации компонент тензора деформаций обеспечивает нужное число степеней свободы, что в свою очередь необходимо для корректного представления перемещений элемента как жесткого целого [6, 13].

Для результирующих напряжений примем аналогичную (4.3) аппроксимацию:

$$\mathbf{T} = \sum_{r_1, r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{T}^{r_1 r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{T}^{00} = \left[T_{11}^{-00} T_{11}^{+00} T_{22}^{-00} T_{22}^{+00} T_{12}^{-00} T_{12}^{+00} T_{13}^{-00} T_{13}^{+00} T_{23}^{-00} T_{23}^{+00} T_{33}^{00} \right]^T,$$

$$\mathbf{T}^{01} = \left[T_{11}^{-01} T_{11}^{+01} T_{13}^{-01} T_{13}^{+01} T_{33}^{01} \right]^T, \quad \mathbf{T}^{10} = \left[T_{22}^{-10} T_{22}^{+10} T_{23}^{-10} T_{23}^{+10} T_{33}^{10} \right]^T, \quad \mathbf{T}^{11} = \left[T_{33}^{11} \right]^T.$$

Вводя аппроксимации (4.2) – (4.5) в уравнение (4.1) и пользуясь стандартной вариационной процедурой смешанной модели МКЭ, приходим к следующим уравнениям равновесия элемента:

$$\mathbf{E}^{r_1 r_2} = \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \mathbf{B}^{r_1 r_2} \mathbf{V}, \quad \mathbf{T}^{r_1 r_2} = \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2}, \quad (4.6)$$

$$\sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} \left[\left(\mathbf{B}^{r_1 r_2} \right)^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{T}^{r_1 r_2} + \mathbf{L}^{r_1 r_2} \mathbf{\Lambda} \right] = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{V} = \left[\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_4^T \right]^T$ – столбец узловых перемещений элемента;

$\mathbf{\Lambda} = \left[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \right]^T$ – столбец узловых значений множителя Лагранжа; \mathbf{F} – столбец

узловых нагрузок; $\mathbf{L}^{i_1 i_2}$ – матрицы размера 24×4 , отвечающие контактному взаимодействию элемента; $\mathbf{B}^{i_1 i_2}$ – матрицы размера 11×24 , характеризующие деформационные соотношения (1.3), (1.6).

Дополним уравнения (4.6) соотношениями, отвечающими согласно формулам (3.7) – (3.10) за выполнение условий контакта. В зоне контакта ($\rho \in I_c$) должны удовлетворяться условия

$$g_\rho^+ - \Delta - \mathbf{m}^T \mathbf{v}_\rho - \frac{1}{\varepsilon_{\text{reg}}} \lambda_\rho = 0, \quad (4.7a)$$

$$\lambda_\rho \leq 0, \quad (4.7b)$$

а вне зоны контакта ($\rho \notin I_c$) – условия

$$g_\rho^+ - \Delta - \mathbf{m}^T \mathbf{v}_\rho \geq 0, \quad (4.8a)$$

$$\lambda_\rho = 0, \quad (4.8b)$$

где $I_c \subset \{1, 2, 3, 4\}$ – множество входящих в контакт узлов; g_ρ^+ – значения зазора в узлах элемента.

Исключая в соотношениях (4.6) столбцы $\mathbf{E}^{i_1 i_2}$ и $\mathbf{T}^{i_1 i_2}$, приходим к разрешающей системе уравнений

$$\sum_{i_1, i_2} \frac{1}{3^{i_1 + i_2}} \left[(\mathbf{B}^{i_1 i_2})^T \mathbf{D}^{i_1 i_2} \mathbf{B}^{i_1 i_2} \mathbf{V} + \mathbf{L}^{i_1 i_2} \mathbf{\Lambda} \right] = \mathbf{F}, \quad (4.9)$$

которую следует решать совместно с контактными условиями (4.7) – (4.8). В соотношениях (4.9) для удобства записи введены матрицы порядка 11×11 :

$$\mathbf{D}^{i_1 i_2} = \mathbf{Q}^{i_1 i_2} (\mathbf{Q}^{i_1 i_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{i_1 i_2} (\mathbf{Q}^{i_1 i_2})^T.$$

На стандартной процедуре сборки элементов в ансамбль с получением системы уравнений относительно глобального вектора узловых перемещений здесь останавливаться не будем. Далее был использован метод проб и ошибок, суть которого состоит в следующем. Вначале задается начальное приближение зоны контакта и решается модифицированным методом Гаусса для ленточных матриц линейная система уравнений (4.7a), (4.8b), (4.9), затем проверяется выполнение неравенств (4.7b), (4.8a). Если неравенство (4.7b) не выполняется, то узел выводится из зоны контакта. В случае, если не выполняется неравенство (4.8a), то узел добавляется к зоне контакта.

5 Точное решение задачи цилиндрического изгиба пластины жестким штампом

Рассмотрим задачу цилиндрического изгиба изотропной пластины абсолютно жестким пологим штампом [1], радиус основания которого равен R (рис. 3). Если предположить, что существует зона плотного прилегания пластины и штампа $[-b, b]$, то в этой зоне согласно условию (3.7) имеем

$$v_3^+ = \frac{x_1^2}{2R} - \Delta, \quad (5.1)$$

где Δ – смещение штампа.

Ограничиваясь случаем симметричных граничных условий, разрешающие уравнения [1], описывающие изгиб пластины в зоне контакта $[0, b]$, запишем в виде

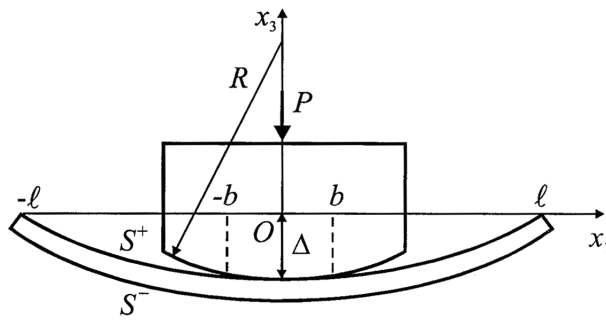


Рис. 3 Цилиндрический изгиб пластины жестким штампом

$$D \frac{d^4 \bar{v}_3}{dx_1^4} = \frac{h^2}{6(1-\nu)} \frac{d^2 q}{dx_1^2} - q, \quad \frac{d^2 \beta_3}{dx_1^2} - \lambda \beta_3 - \frac{\nu \lambda}{1-\nu} \frac{d \bar{v}_1}{dx_1} = \frac{\lambda}{2E} q,$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_1}{dx_1^2} = 0, \quad \beta_1 = -\frac{h^2}{6(1-\nu)} \frac{d^3 \bar{v}_3}{dx_1^3} - \frac{d \bar{v}_3}{dx_1} + \frac{(1+\nu) h}{3(1-\nu) E} \frac{dq}{dx_1}, \quad (5.2)$$

$$\bar{v}_n = \frac{1}{2} (\bar{v}_n^- + \bar{v}_n^+), \quad \beta_n = \frac{1}{h} (\bar{v}_n^+ - \bar{v}_n^-), \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \lambda = \frac{24(1+\nu)}{h^2},$$

где $q(x_1)$ – контактное давление; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; $n = 1, 3$.

Разрешающие уравнения, характеризующие изгиб пластины вне зоны контакта $[b, \ell]$, представим в форме

$$\frac{d^4 \bar{v}_3}{dx_1^4} = 0, \quad \frac{d^2 \beta_3}{dx_1^2} - \lambda \beta_3 - \frac{\nu \lambda}{1-\nu} \frac{d \bar{v}_1}{dx_1} = 0,$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_1}{dx_1^2} = 0, \quad \beta_1 = -\frac{h^2}{6(1-\nu)} \frac{d^3 \bar{v}_3}{dx_1^3} - \frac{d \bar{v}_3}{dx_1}. \quad (5.3)$$

Рассмотрим для определенности случай шарнирного опирания краев, тогда граничные условия и условия непрерывности в точке $x_1 = b$ имеют вид:

$$\bar{v}_1(0) = 0, \quad \beta_1(0) = 0, \quad \frac{d \bar{v}_3}{dx_1}(0) = 0, \quad \frac{d \beta_3}{dx_1}(0) = 0; \quad (5.4)$$

$$\frac{d \bar{v}_1}{dx_1}(\ell) = 0, \quad \frac{d \beta_1}{dx_1}(\ell) = 0, \quad \bar{v}_3(\ell) = 0, \quad \beta_3(\ell) = 0; \quad (5.5)$$

$$\bar{v}_n(b-0) = \bar{v}_n(b+0), \quad \beta_n(b-0) = \beta_n(b+0),$$

$$\frac{d \bar{v}_n}{dx_1}(b-0) = \frac{d \bar{v}_n}{dx_1}(b+0), \quad \frac{d \beta_n}{dx_1}(b-0) = \frac{d \beta_n}{dx_1}(b+0). \quad (5.6)$$

Вводя функцию \bar{v}_3^+ из (5.1) в уравнения (5.2) и исключая перемещения с учетом соотношений (5.3) – (5.6), приходим к дифференциальному уравнению для определения контактного давления

$$\frac{d^4 q}{dx_1^4} - \frac{3(5+3\nu)}{2h^2} \frac{d^2 q}{dx_1^2} + \frac{36(1-\nu^2)}{h^4} q = 0. \quad (5.7)$$

Из соображений симметрии решение уравнения (5.7) является четным, поэтому может быть представлено в форме

$$q = c_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 \cos \gamma x_1 + c_2 \operatorname{sh} \alpha x_1 \sin \gamma x_1, \quad (5.8)$$

$$\alpha = \alpha \cos(\varphi/2), \quad \gamma = \alpha \sin(\varphi/2), \quad \alpha = \frac{1}{h} \sqrt[4]{36(1-\nu^2)}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{39-30\nu-73\nu^2}}{5+3\nu}.$$

Константы c_1 и c_2 могут быть найдены в процессе решения граничных задач (5.2) – (5.6) с последующим удовлетворением условия равновесия штампа

$$2 \int_0^b q(x_1) dx_1 = P. \quad (5.9)$$

В результате приходим к условию того, что контактное давление не обращается в нуль на границе области контакта, т.е.

$$q(b) \neq 0,$$

что противоречит решению плоской задачи теории упругости [2].

Что касается решения задачи [1], которое позволяет удовлетворить условию контакта

$$q(b) = 0,$$

то оно приводит к нарушению одного из условий непрерывности (5.6)

$$\frac{d\beta_3}{dx_1}(b-0) \neq \frac{d\beta_3}{dx_1}(b+0).$$

Указанные несоответствия обусловлены использованием кинематической модели Тимошенко (1.1) и могут быть преодолены путем применения более общих кинематических моделей, основанных на нелинейных законах распределения перемещений по толщине пластины [4, 16].

Результаты решения задачи при $E = 2 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,3$; $\ell = 100$ мм; $R = 1000$ мм представлены в табл. 1. Как видим, решение [1] приводит к заниженным значениям параметра нагружения P^* . Однако, в целом оба решения хорошо согласуются с точным решением теории упругости [2].

Таблица 1

**Зависимость параметра нагружения $P^* = P\ell R/2D$
от геометрии пластины и контактной области**

b/ℓ	$\ell/h = 10$			$\ell/h = 50$		
	Решение [2]	$q(b) \neq 0$	$q(b) = 0$	Решение [2]	$q(b) \neq 0$	$q(b) = 0$
0,03	0,819	0,888	0,699	1,017	1,018	1,014
0,06	0,970	0,983	0,940	1,049	1,050	1,046
0,1	1,032	1,039	1,016	1,095	1,109	1,092
0,3	1,303	1,314	1,284	1,402	1,409	1,397
0,6	2,140	2,303	2,089	2,417	2,449	2,405

6 Сравнительный анализ численных и аналитических результатов расчета

Результаты численных расчетов результирующей контактного давления P из (5.9) и размера контактной области b , показанные для шарнирно опертой и защемленной пластин в табл. 2, 3, были получены с использованием тех же значений механико-геометрических параметров, что и ранее. При этом N^e обозначает число элементов, а ε^{reg} – регуляризационный параметр из (3.10). Расчеты выполнены по следующему алгоритму. Вначале задается значение параметра b_T , затем на основе аналитического решения при $q(b) \neq 0$, находятся точные значения перемещения штампа Δ_T и усилия P_T . Далее перемещение Δ_T вводится в условие непроникания (3.7) и решается контактная задача с помощью МКЭ. В результате, могут быть вычислены два основных параметра контактной задачи P и b . Можно видеть, что при малых значениях регуляризационного параметра $\varepsilon^{\text{reg}} \leq 10^3$, а для толстых пластин и при $\varepsilon^{\text{reg}} \leq 10^4$, происходит заметное увеличение размеров контактной области.

Дополнительные данные о существенном влиянии регуляризационного параметра на распределение безразмерного контактного давления $q^* = q\ell/P$ представлены на рис. 4. Как видим, в данном классе задач оптимальным значением для параметра регуляризации является $\varepsilon^{\text{reg}} = 10^5$, которое приводит к хорошему согласованию с аналитическим решением особенно для толстых пластин.

Таблица 2

**Сравнение результатов расчета на основе МКЭ с точным решением
при $q(b) \neq 0$ для шарнирно опертой пластины**

		$\ell/h = 10$				$\ell/h = 50$			
		$b_T = 15,0$ $\Delta_T = 3,6290$ $P_T = 40,22$		$b_T = 30,0$ $\Delta_T = 4,0469$ $P_T = 48,15$		$b_T = 15,0$ $\Delta_T = 3,7647$ $P_T = 0,3403$		$b_T = 30,0$ $\Delta_T = 4,1608$ $P_T = 0,4128$	
N^e	ε^{reg}	P	b	P	b	P	b	P	b
10	10^5	40,39	10,0	40,51	30,0	0,3411	20,0	0,4177	30,0
20	10^5	40,27	15,0	48,23	30,0	0,3410	15,0	0,4141	30,0
40	10^5	40,23	15,0	48,17	30,0	0,3405	15,0	0,4131	30,0
80	10^7	40,22	15,0	48,15	30,0	0,3404	15,0	0,4129	30,0
80	10^5	40,22	15,0	48,15	30,0	0,3404	15,0	0,4129	30,0
80	10^4	40,22	16,25	48,15	31,25	0,3403	15,0	0,4129	30,0
80	10^3	40,24	18,75	48,12	33,75	0,3403	16,25	0,4129	31,25

Таблица 3

Сравнение результатов расчета на основе МКЭ с точным решением при $q(b) \neq 0$ для защемленной пластины

b_T, Δ_T, P_T – точные значения		$\ell/h = 10$				$\ell/h = 50$			
		$b_T = 15,0$ $\Delta_T = 1,9981$ $P_T = 88,06$		$b_T = 30,0$ $\Delta_T = 2,5047$ $P_T = 126,0$		$b_T = 15,0$ $\Delta_T = 2,1312$ $P_T = 0,7903$		$b_T = 30,0$ $\Delta_T = 2,6358$ $P_T = 1,163$	
N^e	ε^{reg}	P	b	P	b	P	b	P	b
10	10^5	89,27	10,0	129,0	30,0	0,7999	20,0	1,199	30,0
20	10^5	88,40	15,0	126,7	30,0	0,7948	15,0	1,173	30,0
40	10^5	88,14	15,0	126,2	30,0	0,7914	15,0	1,165	30,0
80	10^7	88,08	15,0	126,1	30,0	0,7906	15,0	1,164	30,0
80	10^5	88,08	15,0	126,1	30,0	0,7906	15,0	1,164	30,0
80	10^4	88,07	16,25	126,0	31,25	0,7906	15,0	1,164	30,0
80	10^3	88,07	18,75	125,8	33,75	0,7905	16,25	1,164	31,25

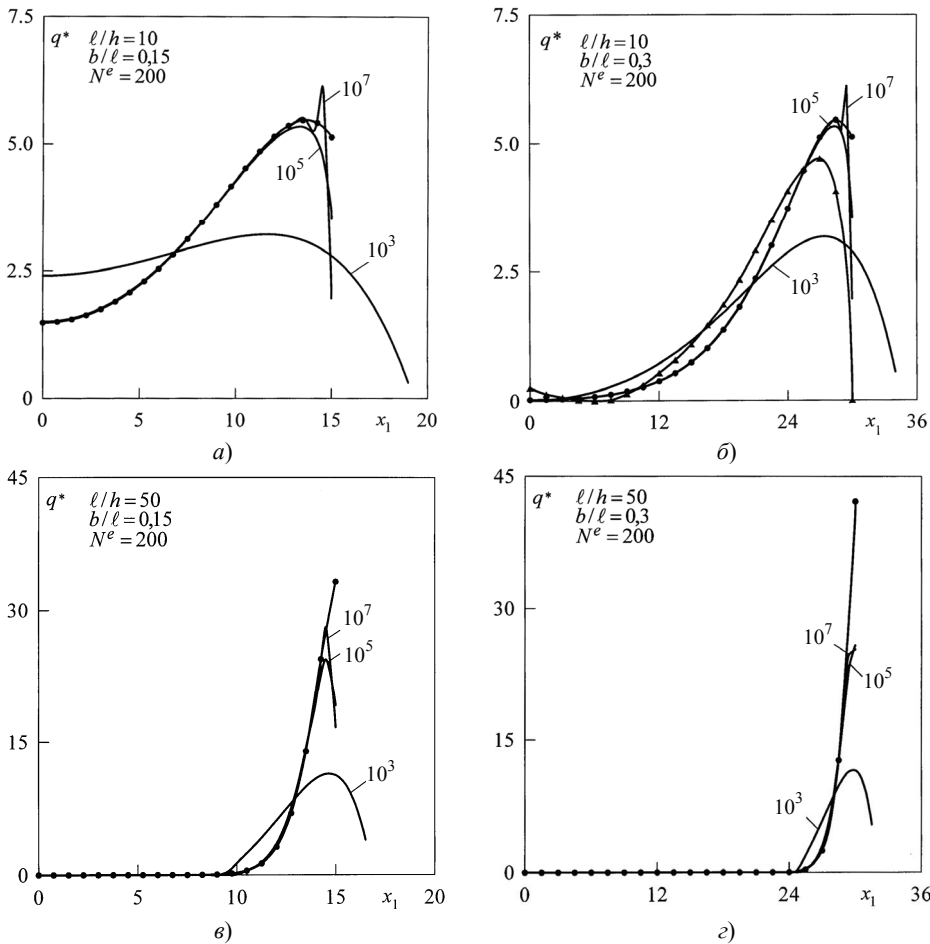


Рис. 4 Зависимость контактного давления $q^* = q\ell/P$ от координаты x_1 :

— МКЭ; —●— точное решение при $q(b) \neq 0$;
—▲— точное решение плоской задачи теории упругости [2]

Список литературы

1. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Численное решение контактной задачи для многослойных композитных пластин // Вестник ТГТУ. – 1998. – Т. 4, № 4. – С. 526 – 539.
2. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 412 с.
3. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Сравнительный анализ двух алгоритмов численного решения нелинейных задач статики многослойных анизотропных оболочек вращения. 2. Учет поперечного обжатия // Механика композитных материалов. – 1999. – Т. 35, № 4. – С. 435 – 446.
4. Kulikov G.M. Refined Global Approximation Theory of Multilayered Plates and Shells // Journal of Engineering Mechanics. – 2001. – V. 127, No. 2. – Pp. 119 – 125.
5. Kulikov G.M. Analysis of Initially Stressed Multilayered Shells // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38, No. 26 – 27. – Pp. 4535 – 4555.
6. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Simple and Effective Elements Based upon Timoshenko-Mindlin Shell Theory // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2002. – V. 191, No. 11 – 12. – Pp. 1173 – 1187.
7. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 1. Геометрически линейная постановка // Механика композитных материалов. – 2002. – Т. 38, № 5. – С. 607 – 620.
8. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Контактная задача для многослойной анизотропной оболочки вращения // Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций. – М.: Из-во МГУ, 2000. – С. 205 – 223.
9. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
10. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 2. Геометрически нелинейная постановка // Механика композитных материалов. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 815 – 826.
11. Bischoff M., Ramm E. On the Physical Significance of Higher Order Kinematic and Static Variables in a Three-Dimensional Shell Formulation // International Journal of Solids and Structures. – 2000. – V. 37. – Pp. 6933 – 6960.
12. Zhong Z.H. Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems. – Oxford: Univ. Press, 1993. – 371 p.
13. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Non-Linear Strain-Displacement Equations Exactly Representing Large Rigid-Body Motions. Part I. Timoshenko-Mindlin Shell Theory // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2003. – V. 192, No. 7 – 8. – Pp. 851 – 875.
14. Hughes T.J.R., Tezduyar T.E. Finite Elements Based upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element // Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics. – 1981. – Vol. 48. – Pp. 587 – 596.
15. Wempner G., Talaslidis D., Hwang C.M. A Simple and Efficient Approximation of Shells via Finite Quadrilateral Elements // Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics. – 1982. – Vol. 49. – Pp. 115 – 120.
16. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.

Contact Problem for the Elastic Plate and Rigid Body

1. Geometrically Linear Formulation

G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova, D.V. Kazakov

Department of Applied Mathematics and Mechanics, TSTU

Key words and phrases: geometrically linear contact problem; Timoshenko-type plate; mixed finite element method; perturbed Lagrangian formulation.

Abstract: A contact problem for the geometrically linear elastic Timoshenko-type plate and rigid punch is considered. The new analytical solution has been derived for the cylindrical bending of the plate by a rigid punch of the uniform curvature accounting for the thickness change. The numerical algorithm has been elaborated for solving the contact problem on the basis of the mixed FEM by using the perturbed Lagrangian formulation. A comparison of the obtained numerical and analytical results, and some recommendations on choosing the penalty parameter are presented.

Kontaktzusammenwirken der elastischen Platte mit dem Hartkörper

1. Geometrisch lineare Stellung

Zusammenfassung: Es ist die Aufgabe des Kontaktzusammenwirkens der geometrischen elastischen Platte vom Timoschenko-Typus mit dem absolut harten Gesenk der unveränderlichen Krümmung betrachtet. Es ist die neue analytische Lösung der Aufgabe der zylindrischen Plattenbiegung mit Rücksicht auf die Querabnahme erhalten. Es ist den Algorithmus der zahlenmäßigen Lösung der Kontaktaufgabe auf Grund der Gemischtenmethode der Endelemente mit der Benutzung der modifizierten Methode von Lagrange-Multiplikatoren ausgearbeitet. Es ist den Vergleich der erhaltenen Zahl- und Analytischergebnisse angeführt. Es sind die Empfehlungen nach der Auswahl des die Hartcharakteristiken des Gesenkes charakterisierenden Regelparameters angegeben.

Interaction de contact de la plaquette élastique avec un corps rigide

Résumé: Est examiné le problème de l'interaction de contact de la plaquette élastique du type Timochenko avec une étampe rigide absolue de la courbure constante. Est reçue une solution analytique de problème de la flexion cylindrique de la plaquette compte tenu du serrage transversal. Est élaboré l'algorithme de la solution numérique du problème de contact à la base de la méthode mixte des éléments finis avec l'utilisation de la méthode de modification des multiplicateurs de Lagrange. Est citée la correspondance des solutions numériques et analytiques reçues et sont données les recommandations sur le choix du paramètre de régularisation définissant les caractéristiques rigides de l'étampe.
