УДК 517.925

СУЩЕСТВОВАНИЕ, УСТОЙЧИВОСТЬ И СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЕДИНСТВЕННОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ*

А.П. Афанасьев[1], С.М. Дзюба[2], Т.Б. Заусонина[2], С.М. Лобанов[2]

Институт системного анализа РАН, г. Москва (1);
ТГУ им. Г.Р. Державина (2)

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Бодровым

Ключевые слова и фразы: структурная устойчивость; существование периодических решений; устойчивость в целом.

Аннотация: Приводятся условия существования, асимптотической устойчивости и структурной устойчивости на множестве единственного периодического решения. Предложен критерий, позволяющий в некоторых случаях производить проверку данных условий.

1 Введение

Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = f(t,x)\,, \tag{1}$$

где $x = (x^1,...,x^n)$ – векторная функция действительной переменной t; $f = (f^1,...,f^n)$ – векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1,...,n$$

на прямом произведении $\mathbb{R}\times\Sigma$ действительной оси $\mathbb{R}$ и некоторого открытого подмножества Σ евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Кроме того, будем считать, что функция f периодична по t с периодом, равным единице.

Вопрос о существовании у системы (1) периодических решений весьма важен как для теории дифференциальных уравнений, так и для теории автоматического регулирования [1 – 4]. Еще более важным представляется вопрос о существовании у этой системы асимптотически устойчивого в целом периодического решения. И, хотя, последняя задача начала изучаться достаточно давно [1 – 3], до недавнего времени полученные здесь результаты, видимо, развития не имели. Вместе с тем, в работе [5] приведены условия существования и асимптотической устойчивости на множестве единственного периодического решения. Целью настоящей работы является отыскание условий, позволяющих в известных случаях установить существование у системы (1) асимптотически и структурно устойчивого на множестве единственного периодического решения.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №№ 01-01-00543, 03-01-00329.

2 Существование и устойчивость единственного периодического решения

Прежде всего, во избежание возможных разночтений приведем результаты, восходящие к основным результатам работ [5-7] и составляющие базу для дальнейшего исследования.

Пусть $\varphi(t)$ – некоторое решение системы (1), определенное для всех значений $t \geq t_0$ и ограниченное при этих значениях t. Решение $\varphi(t)$ назовем *квазипериодическим*, если найдется такая последовательность

$$N_1, N_2, ..., N_k, ..., \lim_{k \to \infty} N_k = \infty \tag{2}$$

натуральных чисел, что

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(t + N_{k+1} - N_k) = \varphi(t)$$

равномерно на всей полуоси $t \geq t_0$.

Пусть теперь $\xi(t)$ – некоторое другое решение системы (1), также определенное для всех значений $t \geq t_0$ и ограниченное при этих значениях t. Будем говорить, что квазипериодическое решение $\varphi(t)$ *присоединено* к решению $\xi(t)$, если при использовании последовательности (2)

$$\lim_{k \to \infty} \xi(t + N_k - 1) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b]$ полуоси $t \geq t_0$.

Легко видеть, что простейшим примером квазипериодического решения может служить периодическое решение рационального периода. Простейшим примером решения, присоединенного, скажем, ко всем другим решениям, может служить асимптотически устойчивое в целом периодическое решение периода, равного единице. Существование и общность положения присоединенных квазипериодических решений в общем случае устанавливает следующее.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $\xi(t)$ *–- некоторое решение системы (1), определенное для всех значений* $t \geq t_0$ *и ограниченное при этих значениях t. Тогда система (1) имеет также и квазипериодическое решение* $\varphi(t)$. *При этом либо само решение* $\xi(t)$ *является квазипериодическим, либо решение* $\varphi(t)$ *присоединено к решению* $\xi(t)$.

Доказательство п р е д л о ж е н и я 1 почти дословно совпадает с доказательством теоремы 1 работы [6] и, потому, здесь опускается (см. также [7]).*

Пусть на множестве Σ определена некоторая полудифференцируемая функция Φ и пусть M – ее полудифференциал. Предположим, что для всех значений $|t| < \infty$ во всех точках x, y множества Σ имеет место неравенство

$$M\left[x - y, f(t,x) - f(t,y)\right] \leq L\left[t, \Phi(x - y)\right], \tag{3}$$

где L – непрерывная функция, такая, что каждое решение $u(t)$ уравнения

---

* В работах [6, 7] используется термин "условно-периодическое решение". Это представляется не совсем удачным, поскольку в [6, 7] авторы упустили из виду, что данный термин уже употребляется в ином смысле (см., например, [8]).

$$\dot{u} = L(t,u) \tag{4}$$

с начальным условием

$$u(t_0) = u_0$$

определено для всех значений $|t| < \infty$, причем при $u_0 > 0$ это решение удовлетворяет условию

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) = +\infty, \tag{5}$$

а при $u_0 < 0$ – условию

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = -\infty\,. \tag{6}$$

И, наконец, пусть при некотором значении $t = t'$ для любых двух различных точек x и y множества Σ выполнено неравенство

$$M\left[x - y, f(t',x) - f(t',y)\right] < 0.$$

Тогда будем говорить, что Σ – однородное множество.

Простейшим примером однородного множества может служить множество, во всех точках которого выполнено условие

$$\left\langle K\left(x-y\right), f\left(t,x\right) - f\left(t,y\right)\right\rangle \le -k(t)\left|x-y\right|^2,$$

где K – некоторая симметрическая невырожденная матрица; k – некоторая скалярная функция, такая, что для всех значений $|t_0| < \infty$

$$\int_{-\infty}^{t_0} k(t)dt = \int_{t_0}^{\infty} k(t)dt = \infty \tag{7}$$

[9, с. 224]). При этом использование предложения 1 и понятия однородного множества приводит к следующему предложению, позволяющему установить существование периодических решений и довольно полно описать структуру ограниченных непериодических решений.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* $\xi(t)$ *– некоторое решение системы (1), определенное для всех значений* $t \ge t_0$ *и содержащееся при этих значениях* t *в некотором компактном подмножестве* E *однородного множества* Σ. *Тогда система (1) имеет также единственное периодическое решение* $\varphi(t)$ *периода, равного единице. При этом либо*

$$\xi(t) \equiv \varphi(t), \tag{8}$$

либо

$$\lim_{t \to \infty}\left|\xi(t) - \varphi(t)\right| = 0. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\xi(t)$ – некоторое решение системы (1) с начальным условием

$$\xi(0) = \xi_0,$$

определенное для всех значений $t \ge 0$, и содержащееся при этих значениях t в множестве E. Тогда, согласно предложению 1, система (1) имеет квазипериодическое решение $\varphi(t)$, присоединенное к решению $\xi(t)$, т.е. найдется такая последовательность натуральных чисел (2), что

$$\lim_{k\to\infty} \xi(t + N_k - 1) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a,\ b]$ полуоси $t \ge 0$ и

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t + N_{k+1} - N_k) = \varphi(t)$$

равномерно на всей полуоси $t \ge 0$.

Заметим теперь, что решение $\varphi(t)$ определено для всех значений $|t| < \infty$ и ограничено при этих значениях t.

В самом деле, если бы решение $\varphi(t)$ было не определено для всех значений $|t| < \infty$, то при некотором значении $t' < 0$ точка $\varphi(t')$ оказалась бы на границе $\partial\Sigma$ множества Σ. При этом по определению

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t' + N_{k+1} - N_k) = \varphi(t').$$

Последнее, однако, невозможно, поскольку при всех значениях $t \ge 0$ решение $\varphi(t)$ содержится в компактном подмножестве E открытого множества Σ, а $\varphi(t') \in \partial\Sigma$.

Для всех значений $|t| < \infty$ положим

$$\varphi_N(t) = \varphi(t + N - 1), \quad N = 1,\ 2,\ 3,\ \dots. \tag{10}$$

Каждая из функций множества (10), как несложно заметить, является решением системы (1) с начальным условием

$$\varphi_N(0) = \varphi(N),$$

определенным для всех значений $|t| < \infty$ и содержащимся при этих значениях t в множестве E. Но множество Σ, содержащее E, однородно, а в однородном множестве система (1) может иметь только одно решение, определенное для всех значений $|t| < \infty$ и ограниченное при этих значениях t [9, с. 223]. Последнее означает, что

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \dots = \varphi_N(0) = \dots,$$

т.е. решение $\varphi(t)$ является периодическим решением периода равного единице.

Для всех значений $t \ge 0$

$$\xi_N(t) = \xi(t + N - 1), \quad N = 1,\ 2,\ 3,\ \dots. \tag{11}$$

Легко видеть, что каждая из функций множества (11) является решением системы (1) с начальным условием

$$\xi_N(0) = \xi(N),$$

при всех значениях $t \ge 0$ содержащимся в множестве E. Поэтому в силу п р е д л о ж е н и я 1 решение $\xi(t)$ либо совпадает с периодическим решением $\varphi(t)$, либо $\varphi(t)$ присоединено к каждому из решений множества (11). Но, так как решение системы (1) непрерывно зависит от начальных условий, в условиях п р е д л о ж е н и я 2 множество (2) совпадает с множеством натуральных чисел и, значит, для решения $\xi(t)$ выполнено одно из условий (8) или (9).

Таким образом, п р е д л о ж е н и е 2 доказано.

Пусть на множестве Σ система (1) имеет периодическое решение $\varphi(t)$ периода, равного единице. Тогда будем говорить, что решение $\varphi(t)$ асимптотически устойчиво в целом на множестве Σ , если выполнены следующие три условия:

1) если ξ_0 – произвольная точка множества Σ, то решение $\xi(t)$ системы (1) с начальным условием

$$\xi(t_0) = \xi_0 \tag{12}$$

определено для всех значений $t \geq t_0$ и содержится при этих значениях t в множестве Σ;

2) решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову;

3) каждое решение $\xi(t)$ с начальным условием (12), отличное от $\varphi(t)$, связано с $\varphi(t)$ равенством (9).

Предположим теперь, что Σ – однородное множество. Тогда, если для всех значений $0 \leq t_0 \leq 1$ и $\xi_0 \in \Sigma$ решение $\xi(t)$ системы (1) с начальным условием (12) определено для всех значений $t \geq t_0$ и ограничено при этих значениях t, то будем говорить, что Σ – множество Ляпунова для системы (1).

Используя понятие множества Ляпунова, имеем следующее весьма важное для дальнейших построений предложение.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть* Σ *– множество Ляпунова для системы (1). Тогда на множестве* Σ *система (1) имеет единственное периодическое решение* $\varphi(t)$ *периода, равного единице. При этом решение* $\varphi(t)$ *асимптотически устойчиво в целом на множестве* Σ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ξ_0 – некоторая точка множества Σ и пусть $\xi(t)$ – решение системы (1) с начальным условием (12). Тогда, поскольку множество Σ является множеством Ляпунова для системы (1), решение $\xi(t)$ определено для всех значений $t \geq t_0$ и содержится при этих значениях t в некотором компактном подмножестве E множества Σ. Так как при этом множество Ляпунова по определению однородно, то согласно предложению 2 система (1) имеет на множестве Σ единственное периодическое решение $\varphi(t)$ периода, равного единице, причем такое, что решения $\varphi(t)$ и $\xi(t)$ удовлетворяют одному из условий (8) или (9). Но выбор значения $\xi_0 \in \Sigma$ по существу не играет никакой роли. Поэтому любое непериодическое решение $\xi(t)$ системы (1) определено для всех значений $t \geq t_0$, содержится при этих значениях t в множестве E и удовлетворяет условию (9), т.е. для доказательства п р е д л о ж е н и я 3 остается показать, что решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову.

Для доказательства последнего заметим, что решения системы (1) непрерывно зависят от начальных условий. Поскольку при этом множество E компактно, то решения системы (1) равномерно непрерывно зависят от начальных условий на множестве $[0,\ 1] \times E$. Но так как функция f периодична по t с периодом, равным единице, решения системы (1) равномерно непрерывно зависят от начальных условий на всем множестве $\mathbb{R} \times E$, т.е. решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову.

Таким образом, п р е д л о ж е н и е 3 доказано.

З а м е ч а н и е. Если система (1) автономна, то легко видеть, что решение $\varphi(t)$ является тривиальным решением, соответствующим положению равновесия этой системы.

3 Структурная устойчивость единственного периодического решения

Наряду с системой (1) рассмотрим теперь нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \tag{13}$$

где $x = \left(x^1, ..., x^n\right)$ – векторная функция действительного переменного t; $f = \left(f^1, ..., f^n\right)$ – векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, ..., n$$

на прямом произведении $\mathbb{R} \times \Sigma \times \Gamma$ действительной прямой $\mathbb{R}$ и некоторых открытых подмножеств Σ и Γ евклидовых векторных пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Кроме того, будем считать, что функция f периодична по t с периодом, равным единице.

Пусть на множестве Σ определена некоторая полудифференцируемая функция Φ и пусть, как и ранее, M – ее полудифференциал. Предположим, что для всех значений $|t| < \infty$ и $\mu \in \Gamma$ во всех точках x, y множества Σ имеет место неравенство

$$M\left[x - y, f\left(t, x, \mu\right) - f\left(t, y, \mu\right)\right] \le L\left[t, \Phi\left(x - y\right)\right], \tag{14}$$

где L – непрерывная функция, такая, что каждое решение $u(t)$ уравнения (4) удовлетворяет условиям (5) и (6). И, наконец, пусть для всех $\mu \in \Gamma$ найдется такое значение $t = t'$ при котором для любых двух различных точек x и y множества Σ выполнено неравенство

$$M\left[x - y, f\left(t', x, \mu\right) - f\left(t', y, \mu\right)\right] < 0 .$$

Тогда по аналогии с п.2 будем говорить, что Σ – *равномерно однородное множество*.

Простейшим примером равномерного однородного множества может служить множество во всех точках которого при $|t| < \infty$ и $\mu \in \Gamma$ выполнено условие

$$\left\langle K\left(x - y\right), f\left(t, x, \mu\right) - f\left(t, y, \mu\right)\right\rangle \le -k(t)\left|x - y\right|^2 ,$$

где K – некоторая симметрическая невырожденная матрица; k – некоторая скалярная функция, такая, что для всех значений $|t| < \infty$ выполнено неравенство (7).

Предположим теперь, что Σ – равномерно однородное множество. Тогда, если для всех значений $\mu \in \Gamma$ множество Σ является множеством Ляпунова, то будем говорить, что Σ – *равномерное множество Ляпунова* для системы (13).

Пусть для всех $\mu \in \Gamma$ система (13) имеет асимптотически устойчивое в целом на множестве Σ периодическое решение $\varphi_\mu(t)$ периода, равного единице. Если при этом

$$\lim_{\mu' \to \mu''} \varphi_{\mu'}(t) = \varphi_{\mu''}(t)$$

равномерно на всей полуоси $t \ge t_0$, то будем говорить, что система (13) *асимптотически структурно устойчива на множестве* Σ.

Легко видеть, что в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров у асимптотически структурно устойчивой на множестве Σ системы соответствующие решения системы (13) переходят одно в другое при $\mu' \to \mu''$. Более того, в качестве тривиального следствия предложения 3 имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть* Σ *– равномерное множество Ляпунова для системы (13). Тогда система (13) асимптотически структурно устойчива на множестве* Σ.

4 Частный случай равномерного множества Ляпунова

Предположим, что множество Σ совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$. Поскольку функция f периодична по t с периодом, равным единице, то функцию k также можно считать периодической с периодом, равным единице. Предположим, что для всех значений $0 \le t \le 1$ при $\mu \in \Gamma$ во всех точках x, y пространства $\mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\left\langle K\left(x-y\right), f\left(t,x,\mu\right) - f\left(t,y,\mu\right)\right\rangle \le -k(t)\left|x-y\right|^2, \tag{15}$$

где K – симметрическая положительно определенная матрица, а функция k удовлетворяет условию

$$\int_0^1 k(t)dt > 0 . \tag{16}$$

Тогда согласно периодичности функции k условие (15) представляет собой частный случай условия (14). При этом уравнение (4) принимает вид

$$\dot{u} = -ak(t)u ,$$

где a – некоторое положительное число [9, с. 224]. Следовательно, в силу условия (16) каждое его решение $u(t)$ с начальным условием

$$u(t_0) = u_0 > 0$$

определено для всех значений $|t| < \infty$ и удовлетворяет условию (5). Поэтому пространство $\mathbb{R}^n$ является равномерно однородным множеством. Более того, поскольку

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = 0 ,$$

то, как несложно заметить, каждое решение $\xi(t)$ системы (13) определено для всех значений $t \ge t_0$ и ограничено при этих значениях t.

Таким образом, при выполнении условий (15) и (16) пространство $\mathbb{R}^n$ будет равномерным множеством Ляпунова для системы (13). Значит, в силу теоремы п.3 система (13) асимптотически структурно устойчива в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Условия (16) и, особенно, (15) выглядят малопривлекательно для практического использования, поскольку требуют задания функции k с одной стороны и проверки неравенства (15) для всех значений x и y – с другой. Все эти трудности, однако, могут быть в значительной мере обойдены при использовании следующих достаточно простых преобразований.

В самом деле, пусть

$$F(t,x,\mu)=\left(\frac{\partial f^{i}(t,x,\mu)}{\partial x^{j}}\right)$$

– матрица Якоби для функции f. Тогда, поскольку для всех значений $(x,y)\in\mathbb{R}^n$, $\mu\in\Gamma$ и $0\le t\le 1$ справедливо равенство

$$f(t,x,\mu)-f(t,y,\mu)=\int_0^1 F\left[t,y+\theta(x-y),\mu\right](x-y)d\theta,$$

то при этих значениях x, y, μ и t имеет место неравенство

$$\left\langle K(x-y),f(t,x,\mu)-f(t,y,\mu)\right\rangle\le\sup_z\left\langle K(x-y),F(t,z,\mu)(x-y)\right\rangle. \qquad (17)$$

Так как по построению K – симметрическая матрица, то неравенство (17) может быть переписано в следующем эквивалентном виде:

$$\left\langle K(x-y),f(t,x,\mu)-f(t,y,\mu)\right\rangle\le\sup_z\left\langle x-y,KF(t,z,\mu)(x-y)\right\rangle. \qquad (18)$$

Для простоты обозначений положим

$$\Lambda(t,z,\mu)=KF(t,z,\mu)$$

и заметим, что для всех значений $z\in\mathbb{R}^n$, $\mu\in\Gamma$ и $0\le t\le 1$ справедливо равенство

$$\Lambda(t,z,\mu)=\frac{\Lambda(t,z,\mu)+\Lambda'(t,z,\mu)}{2}+\frac{\Lambda(t,z,\mu)-\Lambda'(t,z,\mu)}{2},$$

где штрих означает транспортирование. Поскольку

$$\frac{\Lambda(t,z,\mu)-\Lambda'(t,z,\mu)}{2}$$

– кососимметрическая матрица, то, как известно, для всех значений $(x,y)\in\mathbb{R}^n$, $\mu\in\Gamma$ и $0\le t\le 1$ имеет место равенство

$$\left\langle x-y,\ \frac{\Lambda(t,z,\mu)-\Lambda'(t,z,\mu)}{2}(x-y)\right\rangle=0.$$

Поэтому неравенство (18) может быть переписано в следующем эквивалентном виде

$$\begin{aligned}&\left\langle K(x-y),f(t,x,\mu)-f(t,y,\mu)\right\rangle\le\\&\le\sup_z\left\langle x-y,\ \frac{\Lambda(t,z,\mu)+\Lambda'(t,z,\mu)}{2}(x-y)\right\rangle.\end{aligned} \qquad (19)$$

Обозначим через $\lambda(t,z,\mu)$ – наибольшее собственное число матрицы

$$\frac{\Lambda(t,z,\mu)+\Lambda'(t,z,\mu)}{2}.$$

Тогда, в силу неравенства (19) имеем

$$\left\langle K(x-y),f(t,x,\mu)-f(t,y,\mu)\right\rangle\le\sup_z\lambda(t,z,\mu)\left|x-y\right|^2. \qquad (20)$$

Таким образом, если принять

$$k(t) = -\sup_{z,\mu} \lambda(t, z, \mu),$$

то при выполнении условия

$$\sup_{z,\mu} \int_0^1 \lambda(t, z, \mu) dt < 0$$

из неравенств (15), (16) и (20) следует, что пространство $\mathbb{R}^n$ будет равномерным множеством Ляпунова для системы (13). Поэтому система (13) будет асимптотически структурно устойчивой в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Список литературы

1. Демидович Б.П. О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений, I // Вестник МГУ. – 1961. – № 6. – С. 19-27.
2. Демидович Б.П. О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений, II // Вестник МГУ. – 1962. – № 1. – С. 3-8.
3. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
4. Астафьева И.Н., Гаврилов А.Е., Логачев С.Ю. и др. О неэффективности статических процессов управления // АиТ. – 1993. – № 2. – С. 29-33.
5. Дзюба С.М. О существовании и устойчивости единственного периодического режима // АиТ. – 1998. – № 2. – С.15-22.
6. Дзюба С.М. Об условно-периодических решениях дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т.35. – № 8. – С. 1020-1023.
7. Афанасьев А.П., Дзюба С.М. К вопросам управления в периодических процессах // Изв. РАН. ТиСУ. – 1998. – № 4. – С. 15-20.
8. Колмогоров А.Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. – 1954. – Т. 35. – № 4. – С. 527-530.
9. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

The Existence, Stability and Structural Stability of Single Periodical Solution

A.P. Afanasyev, S.M. Dzyuba, T.B. Zausonina, S.M. Lobanov

The Institute of System Analysis RAS, Moscow (1);
TSU after G.R. Derzhavin (2)

Key words and phrases: structural stability; the existence of periodical solutions; stability in general.

Abstract: The conditions of existence, absolute stability and structural stability on the set of single periodical solution are given. The criterion, which enables to check the above-mentioned conditions in some cases, is offered.

Existenz, Stabilität und Strukturstabilität der einzigen Periodischlösung

Zusammenfassung: Es werden die Bedingungen der Existenz, der asymptotischen Stabilität und der Strukturstabilität auf der Menge der einzigen Periodischlösung angeführt. Es ist das Kriterium, das sich die Prüfung der erwähnten Bedingungen in einigen Fällen durchführen läßt, vorgeschlagen.

Existence, stabilité et stabilité structurelle de la résolution périodique unique

Résumé: Sont mentionnées les conditions de l'existence, de la stabilité asymptotique et la stabilité structurelle sur le multiplicateur de la résolution périodique unique. Est proposé le critérium permettant de réaliser dans certains cas le contrôle des conditions mentionnées.
